ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE DIN BUCUREŞTI

Vasile Teodor NICA

CERCETĂRI OPERAȚIONALE I

Introducere în Cercetarea Operațională
Elemente de Programare Liniară
Analiza Drumului Critic
Introducere în Programarea Neliniară

Note de curs pentru învățământul la distanță

Editura ASE
Bucureşti
2011

Editura ASE
Piața Romană nr. 6, sector 1, Bucureşti, România
cod 010374
www.ase.ro
www.editura.ase.ro
editura@ase.ro

Referenți:

Prof. univ. dr. Virginia MĂRĂCINE
Prof. univ. dr. Dobre ION

ISBN 978-606-505-500-1
978-606-505-502-5 Vol. I

Cuprins

INTRODUCERE ÎN CERCETAREA OPERAȚIONALĂ

Unitatea de învățare 1

1.1 Ce este Cercetarea Operațională 8
1.2 Scurt istoric 12
1.3 O schemă generală de construire a unui model matematic pentru o problemă de optimizare din domeniul economic 12
1.4 Programare matematică. Programare liniară 13
1.5 Exemple de modelare economico matematică 14
Probleme propuse 30
Bibliografie 32

ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ

Unitatea de învățare 2
Proprietăți ale programelor liniare

2.1 Forma generală a unui program liniar 34
2.2 Studiul unui program liniar în două variabile 36
2.3 Concluzii generale rezultate din rezolvarea grafică a programelor liniare în două variabile 41
2.4 Forme speciale de prezentare a programelor liniare 47
Probleme propuse 50

Unitatea de învățare 3
Teoria metodei simplex

3.1 Baze şi soluții de bază ale unui program liniar în formă standard 53
3.2 Importanța conceptului de soluție admisibilă de bază 57
3.3 Metoda simplex. Descriere de principiu 58
3.4 Fundamentele metodei simplex 58
Anexa: Pivotarea gaussiană 61

Unitatea de învăţare 4
Algoritmul simplex

4.1 Algoritmul simplex 65
4.2 Determinarea unei baze admisibile de start. Recunoaşterea incompatibilității
unui program liniar 66
4.3 Citirea inversei bazei curente din tabelul simplex asociat 70
4.4 Ilustrări numerice 71
Probleme propuse... 81

Unitatea de învăţare 5
Dualitatea în programarea liniară

5.1 Dualul unui program liniar.. 86
5.2 Invarianța la dualitate a formei canonice 87
5.3 Principalele rezultate ale dualității liniare... 91
5.4 Interpretarea economică a problemei duale 95
5.5 Algoritmul simplex dual 99
Probleme propuse... 102

Unitatea de învăţare 6
Reoptimizare. Analiza sensitivității. Parametrizare

6.1 Introducere 108
6.2 Modificarea unor componente ale vectorului *c* al coeficienților funcției obiectiv 109
6.3 Modificarea unor componente ale vectorului *b* al termenilor liberi 111
6.4 Adăugarea unei restricții suplimentare 113
6.5 Analiza sensitivității.. 116
6.6 Programare parametrică 119
Probleme propuse... 128

Unitatea de învăţare 7
Problema de transport. Formulare şi rezolvare

7.1 Tipuri speciale de programe linare.. 133
7.2 Problema de transport. Enunț şi model matematic 133
7.3 Caracterul special al problemei de transport... 136
7.4 Construirea unei soluții inițiale pentru problema de transport echilibrată.................................... 137
7.5 Algoritm de rezolvare a problemei de transport echilibrate 141
7.6 Tratarea soluțiilor degenerate.. 146
Probleme propuse... 150

Unitatea de învățare 8
Problema de transport. Aplicații variate

8.1 Ilustrări practice ale problemei de transport 153
8.2 Problema transferului 170
Probleme propuse 174

ANALIZA DRUMULUI CRITIC

Unitatea de învățare 9
Proiect: concept şi structură. Rețeaua coordonatoare AoA a unui proiect

9.1 Introducere 181
9.2 Conceptul de proiect 181
9.3 Structura unui proiect 182
9.4 Reprezentarea AoA a unui proiect 184
    9.4.1 Instrucțiuni de reprezentare 184
    9.4.2 Cum se trasează o rețea AoA 187
9.5 Analiza rețelei coordonatoare AoA 192
    9.5.1 Obiective şi notații 192
    9.5.2 Pasul înainte 193
    9.5.3 Pasul înapoi 194
    9.5.4 Activități critice. Drumul critic 195
    9.5.5 Termenele activităților. Rezerva totală 196
Probleme propuse 199
Bibliografie 203

Unitatea de învățare 10
Actualizarea rețelelor coordonatoare

10.1 O interpretare alternativă a rezervei totale 205
10.2 Diagrama Gantt 209
10.3 Actualizarea rețelelor coordonatoare 210
Probleme propuse 214

Unitatea de învățare 11
Rețeaua coordonatoare AoN a unui proiect. Dependențe multiple

11.1 Reprezentarea AoN a structurii unui proiect 217
    11.1.1 Instrucțiuni de reprezentare AoN 217
    11.1.2 Calculul termenelor activităților. Drumul critic 219

11.2 Dependențe multiple 222
11.2.1 Definiții 222
11.2.2 Calculul termenelor activităților. Drumul critic 226
Probleme propuse 230

Unitatea de învățare 12
Optimizări cost – durată. Alocarea resurselor

12.1 Optimizări cost – durată 234
12.1.1 Preliminarii 234
12.1.2 Durată prestabilită la un cost minim 235
12.1.3 Durată minimă în limita unui buget prestabilit 239
11.2 Alocarea resurselor 242
12.2.1 Preliminarii 242
12.2.2 Rezolvarea unui conflict de resurse 244
12.2.3 O euristică de alocare a resurselor 245
Probleme propuse 250

INTRODUCERE ÎN PROGRAMAREA NELINIARĂ

Unitatea de învățare 13
Neliniar vs. Liniar

13.1 Neliniaritatea în modelarea proceselor economice 254
13.2 Dificultăți cauzate de neliniaritate 258
13.3 Clase de probleme neliniare de optimizare 260
13.4 Modelare neliniară prin exemple 262
Probleme propuse 286
Bibliografie 287

Unitatea de învățare 14
Elemente de programare convexă

14.1 Mulțimi şi funcții convexe 289
14.2 Forma canonică a unui program neliniar. Programe convexe 300
14.3 Lagrangianul unei probleme de optimizare în formă canonică.Puncte şa 302
14.4 Condițiile de optimalitate Karush – Kuhn – Tucker în programarea convexă 307
14.5 Programe pătratice convexe 321
Probleme propuse 330

Unitatea de învățare 1

INTRODUCERE ÎN CERCETAREA OPERAȚIONALĂ

Cuprins

1.1 Ce este Cercetarea Operațională
1.2 Scurt istoric
1.3 O schemă generală de construire a unui model matematic pentru o problemă de optimizare din domeniul economic
1.4 Programare matematică. Programare liniară
1.5 Exemple de modelare economico matematică

Probleme propuse
Bibliografie

1.1 Ce este Cercetarea Operațională?

Dacă la începutul deceniului patru al secolului trecut, termenul „**Cercetare Operațională**”(abreviat **CO**) era necunoscut,astăzi el desemnează un domeniu activ de cercetare ştiinţifică – atât teoretică cât şi aplicativă – dar şi o disciplină universitară importantă.

Pentru necesitățile acestui curs, putem spune că **CO are ca obiect de studiu problemele de optimizare rezultate din modelarea matematică a unor fenomene şi procese din domeniul economic, ştiinţific, tehnic sau militar**.Este o definiție simplă, fără pretenția de exhaustivitate, dar mai uşor de acceptat de către începători cu condiția explicării unor termeni ca **problemă de optimizare** sau **modelare matematică**. Într-adevăr, este nevoie de multă muncă de documentare, cercetare şi practică pentru a înțelege şi a accepta următoarea definiție, corectă şi cuprinzătoare în opinia noastră:

CO reprezintă:

1. aplicarea metodelor ştiinţifice
2. de către o echipă multidisciplinară
3. la studiul problemelor legate de conducerea sistemelor organizate cu scopul obținerii unor rezultate care să servească cât mai bine interesele organizației în ansamblu.

(vezi R. Ackoff, M. Sasieni, Fundamentals of Operations Research,1968. traducere în lb. română: Fundamentele Cercetării Operaționale, 1975, cap I, Introducere. Natura Cercetării Operaționale.)

În esență, o **problemă de optimizare este o problemă de alegere**. Ea presupune dată o colecție de entități denumite generic **soluții admisibile** (sau variante, scenarii) Soluțiile pot fi comparate între ele şi clasificate prin intermediul unui **criteriu de apreciere**(de **performanță**) În acest context se pune problema de a găsi soluția cea mai bine apreciată, numită şi **soluția optimă** a problemei.

Exemplul 1.1 Printre dreptunghiurile cu acelaşi perimetru, să se determine acela care are cea mai mare arie.

Evident, soluțiile acestei probleme sunt dreptunghiurile al căror perimetru este egal cu o valoare dată. Aceste dreptunghiuri sunt comparate între ele prin intermediul ariei care joacă rolul de criteriu de performanță.

Exemplul 1.2 Compania X importă componente electronice şi asamblează două tipuri de computere PC_1 şi PC_2. Vânzarea unui PC_1 (respectiv PC_2) aduce un profit de \$50 (respectiv \$40). Un PC_1 are nevoie de 3 ore pentru asamblare iar un PC_2 necesită 5 ore. Pentru următoarea săptămână sunt disponibile 150 ore pentru asamblare. Compania are în stoc numai 20 monitoare PC_2; altfel spus, în următoarea săptămână ea nu poate produce mai mult de 20 unități PC_2. Pentru depozitare un PC_1 are nevoie de 8u.a. (unități de arie) iar un PC_2 de 5u.a. Spațiul disponibil pentru depozitarea producției din următoarea săptămână însumează 300u.a. Cererea este suficient de mare pentru ca întreaga producție să fie vândută. Conducerea companiei este interesată în elaborarea unui program de producție pentru următoarea săptămână care să-i aducă un profit maxim.

Aici avem de a face cu o situație frecvent întâlnită în domeniul economic: **elaborarea unui program de producție pe o anumită perioadă în condițiile existenței unui disponibil limitat de resurse**. Soluțiile problemei sunt diversele programe de producție realizabile din resursele limitate specificate:

timpul disponibil pentru asamblare, monitoarele PC_2 şi spaţiul de depozitare (un program de producţie este definit prin două valori numerice: numărul de unităţi PC_1, respectiv numărul de unităţi PC_2 ce vor fi produse în următoarea săptămână). Programele admisibile sunt comparate între ele prin intermediul profitului pe care l-ar aduce în caz de realizare.
Pentru determinarea soluţiilor optime ale problemelor enunţate avem nevoie de un instrument special, numit **model matematic**. Ne vom convinge de utilitatea acestui instrument rezolvând prima problemă.

Exemplul 1.1 Reluare. Să notăm cu p perimetrul dreptunghiurilor dintre care urmează să alegem pe cel cu aria maximă. Un asemenea dreptunghi este perfect caracterizat de dimensiunile sale: lungimea L şi lăţimea l. Denumirile celor două dimensiuni sunt irelevante, deoarece atât perimetrul $2L+2l$ cât şi aria $L \cdot l$ nu depind de alegerea lor. Prin ipoteză:

$$2L + 2l = p \quad \text{cu} \quad L \geq 0\,,\, l \geq 0$$

din care putem extrage, de exemplu: $L = \frac{1}{2}p - l$. Ca urmare, orice dreptunghi din mulţimea considerată poate fi caracterizat numai prin "lăţimea" l cu condiţia ca:

$$L = \tfrac{1}{2}p - l \geq 0 \Rightarrow l \leq \tfrac{1}{2}p$$

În concluzie, dreptunghiurile din mulţimea cărora trebuie să facem alegerea pot fi identificate cu acele "lăţimi" l care satisfac condiţia:

$$0 \leq l \leq \tfrac{1}{2}p \tag{1.1}$$

Aria unui asemenea dreptunghi este dată de relaţia:

$$L \cdot l = (\tfrac{1}{2}p - l) \cdot l = -l^2 + \tfrac{1}{2}pl \underset{def}{=} A(l) \tag{1.2}$$

Astfel, problema determinării dreptunghiului cu perimetrul p a cărui arie să fie maximă este echivalentă cu problema găsirii acelei valori numerice l^* care satisface condiţia (1.1) şi care dă funcţiei A(l) din (1.2) cea mai mare valoare. Sintetizăm această "traducere" a problemei originale prin notaţia:

$$\begin{cases} \max \quad A(l) = -l^2 + \frac{1}{2}pl \\ \text{(cu conditia)} \quad 0 \leq l \leq \frac{1}{2}p \end{cases} \tag{1.3}$$

şi vom spune că **(1.3) este modelul matematic al problemei din exemplul 1.1**
Pentru rezolvarea problemei, observăm că funcţia de gradul doi A(l) are un maxim în $l^* = \frac{1}{4}p \in [0, \frac{1}{2}p]$ cu valoarea $A(l^*) = \frac{1}{16}p^2$. Deoarece $L^* = \frac{1}{2}p - l^* = \frac{1}{4}p = l^*$ conchidem că dreptunghiul de arie maximă şi cu perimetrul dat este un **patrat**.

Recapitulând, soluţiile modelului (1.3) sunt numerele l care satisfac condiţia (1.1). Aceste valori sunt comparate şi clasificate prin intermediul funcţiei A(l) din (1.2). Soluţia optimă $l^* = \frac{1}{4}p$ este soluţia care oferă funcţiei A(l) – numită şi **funcţia obiectiv** – cea mai mare valoare posibilă.

Elaborarea unui model matematic pentru problema de optimizare din exemplul 1.2 este asemănătoare.

Exemplul 1.2 Reluare. Ştim că soluțiile problemei sunt diferitele programe de producție realizabile din resursele date. În primul rând vom avea nevoie de o reprezentare matematică a unui program de producție. Dacă notăm:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \equiv \text{numarul de unitati } PC_1 \\ x_2 \equiv \text{numarul de unitati } PC_2 \end{array}\right\} \text{ce vor fi realizate în următoarea săptămână,}$$

atunci cuplul (x_1, x_2) va fi reprezentarea dorită.

Orice cuplu de numere (x_1, x_2) reprezintă un program posibil de producție ? Evident că nu; o primă cerință naturală este:

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \tag{2.1}$$

$x_1 = 0$ sau $x_2 = 0$ semnificând opțiunea firmei de a nu produce PC_1 sau PC_2.

Pentru asamblarea a x_1 unități PC_1 sunt necesare $3x_1$ ore; cele x_2 unități PC_2 au nevoie de $5x_2$ ore. Realizarea programului (x_1, x_2) ar necesita, pentru asamblare, un total de $3x_1 + 5x_2$ ore. Deoarece fondul disponibil de timp de asamblare este limitat la 150 ore, urmează că o condiție de realizabilitate a programului (x_1, x_2) este:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 150 \tag{2.2}$$

Stocul limitat de monitoare PC_2 impune condiția:

$$x_2 \leq 20 \tag{2.3}$$

Pentru depozitarea produselor finite este necesară o suprafață măsurând $8x_1 + 5x_2$ u.a. Limitarea spațiului de depozitare inplică cerința:

$$8x_1 + 5x_2 \leq 300 \tag{2.4}$$

Recapitulând, condițiile (2.1) – (2.4) sunt necesare şi suficiente – în situația dată – pentru ca un cuplu de valori numerice (x_1, x_2) să reprezinte un program de producție realizabil. Cu alte cuvinte, soluțiile admisibile ale problemei "firmei de calculatoare" se identifică cu acele cupluri (x_1, x_2) care satisfac condițiile (2.1) – (2.4).

Profitul rezultat din vânzarea unităților produse prin programul (x_1, x_2) este exprimat prin funcția obiectiv:

$$f = 50x_1 + 40x_2 \tag{2.5}$$

Diferitele programe posibile vor fi apreciate prin valoarea pe care o dau acestei funcții.

Şi astfel, problema din exemplul 1.2 are următoarea „traducere":

În mulțimea cuplurilor de valori numerice care satisfac condițiile (2.1) – (2.4) să se determine cuplul (x_1^*, x_2^*) care dă funcției obiectiv (2.5) cea mai mare valoare posibilă.

Sintetizăm această traducere prin notaţia:

$$\begin{cases} \max\ f = 50x_1 + 40x_2 \\ \quad 3x_1 + 5x_2 \leq 150 \\ \qquad\quad x_2 \leq\ 20 \\ \quad 8x_1 + 5x_2 \leq 300 \\ \quad x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

şi vom spune că ansamblul **(2.6) este modelul matematic al problemei „firmei de calculatoare”.** Găsirea efectivă a soluţiei optime (x_1^*, x_2^*) va fi dată într-o secţiune viitoare.

Revenim la cadrul general impus de titlul secţiunii.

Sfera termenului „**model**” este extrem de largă. Pentru necesităţile noastre ,un model va fi o modalitate de reprezentare a unui segment din realitatea înconjurătoare (o „fotografie”...) Modelele pot fi de diferite tipuri: verbal descriptive, analogice (des folosite în tehnică) sau matematice. **În cadrul acestei lucrări vom avea în vedere în exclusivitate modelele matematice ale unor procese economice.** Aceste modele surprind principalele trăsături ale procesului reprezentat prin intermediul unor relaţii matematice.

Studiul problemelor de optimizare practice înseamnă, pe lângă formularea unor modele matematice adecvate, şi elaborarea unor metode de rezolvare a acestora adică elaborarea de proceduri de găsire a soluţiilor optime.

O dată obţinută soluţia optimă este necesar ca aceasta să fie interpretată şi comparată cu realitatea modelată. Într-adevăr, un model este în general o reprezentare aproximativă a realităţii şi analiza poate să pună în videnţă necesitatea introducerii unor noi elemente în modelul iniţial, pentru a-l apropia şi mai mult de procesul modelat.Însă, modificarea modelului poate implica schimbări în soluţia optimă, schimbări care necesită o reinterpretare a rezultatelor. Acest proces de ameliorare continuă până când se obţine o soluţie satisfăcătoare ce poate fi implementată în cadrul procesului care a generat problema de optimizare. În rezumat, **metoda generală de studiu a CO** poate fi schematizată astfel:

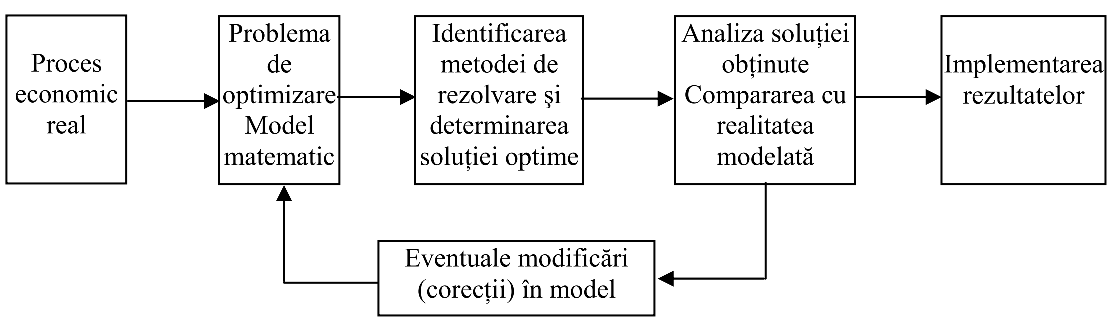


Figura 1.1

În cadrul acestei lucrări vom aborda cu precădere următoarele chestiuni:

- modelarea unor procese economice reprezentative;
- descrierea unor metode de rezolvare a unor probleme de optimizare;
- interpretarea economică a soluţiilor optime obţinute.

Trebuie subliniat faptul că formalizarea unor procese reale conduce de regulă la modele matematice de dimensiuni suficient de mari pentru a face imposibilă rezolvarea lor manuală, oricât de puternice ar fi metodele de soluționare.Acesta este şi motivul pentru care metodele CO au apărut , s-au perfecționat şi s-au diversificat în strânsă legătură cu dezvoltarea şi perfecționarea mijloacelor automate de calcul.

1.2 Scurt istoric

Termenul **Cercetare Operațională** este traducerea originalului englez **Operational Research**. Multe țări europene au preluat acelaşi original: Recherche Operationelle în Franța, Ricerca Operativa în Italia. America a optat pentru varianta **Operations Research** (≡ Cercetarea Operațiilor) preluată în Rusia (Иследование Операций) şi – fără traducere! - în Germania.

Studiul unor probleme de optimizare şi încercări de modelare matematică pot fi identificate din cele mai vechi timpuri. Totuşi, începutul activității denumite astăzi CO, a fost atribuit serviciilor militare engleze în preajma declanşării celui de al doilea război mondial. Efortul de război a necesitat alocarea urgentă a unor resurse limitate în diferite operații militare într-un mod cât mai profitabil. De aceea conducerea militară engleză şi apoi cea americană au mobilizat un mare număr de oameni de ştiință (matematicieni şi fizicieni în special) care să se ocupe de rezolvarea acestor probleme. În esență acestora li s-a cerut să facă **cercetare** asupra **operațiilor** militare(termenul Operational Research apare pentru prima dată în 1938 şi este datorat unui înalt oficial englez). Aceste grupuri mixte de militari şi civili au fost primele echipe de CO, eforturile lor fiind decisive în câştigarea bătăliei aerului în Anglia (este vorba de amplasarea eficientă a stațiilor radar pentru descoperirea din timp a atacurilor avioanelor inamice), în bătălia Atlanticului de Nord (organizarea şi apărarea convoaielor de aprovizionare care traversau oceanul, contra submarinelor germane) sau în campania americană din Pacific contra Japoniei.

Dezvoltarea economică explozivă de după război a făcut ca problemele de conducere cauzate de creşterea complexității activității economice să nu mai poată fi rezolvate cu mijloacele tradiționale bazate pe experiență şi fler. Pentru mulți specialişti care lucraseră în echipele CO din timpul războiului a devenit foarte repede evident faptul că noile probleme „din viața civilă” semănau până la identitate cu cele cu care se confruntaseră în război.

Acesta a fost momentul în care CO şi-a făcut intrarea în industrie,comerț, administrație, afaceri etc. Deja în anii ’50, CO avea statut şi dezvoltare de sine stătătoare în Anglia şi America.

Încheiem această secțiune prin a aminti că facultatea noastră **CSIE a fost prima facultate din țară care a introdus în programa de învățământ disciplina CO în 1969**. Unele elemente erau predate chiar mai înainte de această dată în cadrul unui curs intitulat **calcul economic**.

1.3 O schemă generală de construire a unui model matematic pentru o problemă de optimizare din domeniul economic

În orice problemă de optimizare rezultată din modelarea unui proces economic întâlnim două categorii de mărimi (exemplificările sunt luate din problemele de planificare a activității de producție; altele vor fi date în secțiunile următoare):

- **Mărimi constante**: prețuri, profituri, costuri, cantități disponibile de resurse etc. Bineînțeles că şi aceste mărimi se pot schimba de la o perioadă la alta; important este faptul că pe un interval de timp convenabil ales ele pot fi considerate invariabile!

- **Mărimi variabile** ca de exemplu: cantităţi de bunuri ce urmează a fi produse într-o anumită perioadă.

În principiu, mărimile variabile urmează a fi astfel determinate încât să satisfacă un anumit **criteriu de performanţă** cum ar fi: maximizarea venitului (a profitului) sau minimizarea costurilor de producţie.
Orice proces economic se desfăşoară în anumite **condiţii limitative** ca de exemplu: încadrarea consumurilor de resurse în disponibilele date sau realizarea unui anumit nivel minimal al profitului. Identificarea corectă a acestor condiţii determină nemijlocit calitatea modelului şi de aici şi calitatea soluţiei optime.
În elaborarea modelului matematic pentru o problemă de optimizare practică se recomandă parcurgerea următoarelor etape:

1. **Identificarea mărimilor variabile**:acestea vor deveni **variabilele de decizie** ale modelului;
2. **Identificarea condiţiilor limitative** ce caracterizează procesul modelat şi formalizarea lor în relaţii matematice – inegalităţi şi / sau egalităţi – denumite **restricţii**;
3. **Precizarea criteriului de performanţă** şi formalizarea lui într-o funcţie de variabilele de decizie, numită **funcţia obiectiv**;
4. **Precizarea condiţiilor explicite impuse mărimilor variabile**, ca de exemplu: să ia numai valori **reale nenegative** sau numai valori **întregi** etc.

Odată modelul construit, problema de optimizare originală capătă urmatoarea „traducere”:

Să se determine valorile variabilelor de decizie care satisfac restricţiile şi condiţiile explicite impuse variabilelor şi care oferă funcţiei obiectiv valoarea maximă sau minimă, după caz.

În acest context, soluţiile admisibile ale problemei originale se identifică cu acele seturi de valori numerice acordate variabilelor de decizie care satisfac restricţiile şi condiţiile explicite. Soluţia optimă va fi acea soluţie admisibilă care oferă funcţiei obiectiv cea mai mare sau cea mai mică valoare, după caz.

1.4 Programare matematică. Programare liniară

Ansamblul de relaţii matematice rezultate din aplicarea schemei prezentate şi care constă în maximizarea sau minimizarea unei funcţii ale cărei variabile trebuie să satisfacă un set de restricţii şi condiţii explicite poartă numele de **problemă de programare matematică**.

Dacă funcţia obiectiv şi restricţiile sunt **liniare** în variabilele de decizie vom avea de a face cu o **problemă de programare liniară** sau mai scurt **program liniar**. Neliniaritatea funcţiei obiectiv sau a unora dintre restricţii plasează problema de programare în clasa celor **neliniare**.

Modelele matematice construite în secţiunea 1.1 sunt exemple de probleme de programare matematică. Funcţia obiectiv din (1.3) este neliniară şi ca urmare (1.3) este un program neliniar. În schimb, modelul (2.6) este un program liniar în două variabile.

În principiu, oricărei probleme de optimizare i se poate asocia o problema de programare matematică dar nu întotdeauna acest lucru este şi profitabil pentru rezolvare. Există şi alte modalităţi de reprezentare matematică a unor situaţii practice care vor fi descrise în alte capitole ale lucrării.

1.5 Exemple de modelare economico matematică

În această secțiune se dau câteva exemple de elaborare a modelelor matematice pentru o serie de situații din practica economică. Din motive evidente, situațiile analizate au fost mult simplificate rămânând totuşi plauzibile. S-a urmărit îndeaproape schema generală de construire a unui model matematic descrisă în secțiunea 1.3, punând în evidență:

- **identificarea corectă a mărimilor variabile, a criteriului de performanță şi a condițiilor limitative din situația modelată;**
- **formalizarea corectă a acestor elemente în relații matematice**.

În completare, pentru modelele construite s-au indicat şi soluțiile optime, interpretate în contextul situațiilor originale modelate.
Cititorul este invitat să rezolve singur (fie manual fie cu ajutorul unui utilitar) modelele prezentate ca şi problemele propuse, bineînțeles atunci când va avea la dispoziție şi metoda de soluționare. Succes!

1.Pentru asigurarea activității curente de producție, o firmă are nevoie de anumite cantități din trei repere. În principiu, firma are posibilitatea de a fabrica aceste repere cu mijloace proprii dar conducerea este de părere că resursele disponibile nu sunt suficiente pentru producerea cantităților necesare astfel că se pune problema achiziționării unora de pe piață, cel puțin în parte. În procesul de fabricație al reperelor la firmă sunt implicate două utilaje, fiecare cu un număr limitat de ore disponibile de funcționare. Datele concrete ale situației sunt indicate în tabelul 1.1:

Repere	Consumuri unitare de timp de prelucrare (u.t./reper)		Cost intern de producție (u.m./reper)	Cost de achiziție de pe piață (u.m./reper)	Cantitatea necesară de repere (bucăți)
	M_1	M_2			
R_1	2	5	25	31	200
R_2	3	4	44	47	100
R_3	6	1	19	23	150
Timp disponibil (u.t.)	1200	1000			

Tabelul 1.1

Conducerea firmei este interesată în a stabili cât să producă şi cât să cumpere de pe piață astfel încât totalul cheltuielilor să fie minim. Scrieți un program liniar care să răspundă acestui obiectiv.

Modelul matematic

I) Identificarea mărimilor variabile. Vom nota:

$x_i \equiv$ cantitarea (în bucăți) din reperul R_i produsă în cadrul firmei, $i = 1,2,3$

II) Identificarea condițiilor limitative şi formalizarea lor în restricții.

- încadrarea necesarului de timp de prelucrare în fondurile de timp disponibil ale utilajelor M_1 şi M_2:

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 1200 \qquad (1)$$
$$5x_1 + 4x_2 + x_3 \le 1000 \qquad (2)$$

- cantităţile produse nu trebuie să depăşească comenzile:

$$x_1 \le 200 \qquad (3)$$
$$x_2 \le 100 \qquad (4)$$
$$x_3 \le 150 \qquad (5)$$

Observaţie: un calcul simplu arată că fondurile de timp disponibil ale celor două utilaje nu sunt suficiente pentru producerea reperelor cerute:

$$2 \cdot 200 + 3 \cdot 100 + 6 \cdot 150 = 1600 > 1200$$
$$5 \cdot 200 + 4 \cdot 100 + 1 \cdot 150 = 1550 > 1000$$

astfel că unele repere vor fi cumpărate de pe piaţă la un preţ mai mare.

III) Identificarea criteriului de performanţă şi formalizarea lui în funcţia obiectiv

$$\text{Costul total} = \begin{array}{l}\text{Costul producerii unor repere în}\\ \text{cadrul firmei}\end{array} + \begin{array}{l}\text{Costul achiziţionării restului de}\\ \text{repere de pe piaţă}\end{array} =$$

$$= 25x_1 + 44x_2 + 19x_3 + 31(200 - x_1) + 47(100 - x_2) + 23(150 - x_3) =$$
$$= 14350 - 6x_1 - 3x_2 - 4x_3 \quad \to \quad \min$$

Însă, minimizarea expresiei $14350 - 6x_1 - 3x_2 - 4x_3$ este echivalentă cu maximizarea "scăzătorului" $6x_1 + 3x_2 + 4x_3$ pentru că "descăzutul" este o constantă. În consecinţă vom lua ca funcţie obiectiv:

$$f = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad \to \quad \max \qquad (6)$$

IV) Condiţii explicite impuse variabilelor:

$$x_1 \ge 0 \,,\; x_2 \ge 0 \,,\; x_3 \ge 0 \qquad (7)$$

Observaţie: normal ar fi să impunem şi condiţia "x_1, x_2, x_3 întregi" (cum de altfel ar fi trebuit şi în cazul problemei firmei de calculatoare din exemplul 1.2!) dar nu o facem deoarece s-ar complica rezolvarea. Este posibil ca în soluţia optimă x_1, x_2, x_3 să aibe valori întregi şi dacă nu se întâmplă acest lucru putem recurge la rotunjiri. Soluţia rezultată din rotunjire poate să nu mai fie optimă dar abaterea de la optim este economic neglijabilă…

Reunind (1) – (7) obținem programul liniar:

$$
(P)\begin{cases}
(\max) f = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 1200 \\
5x_1 + 4x_2 + x_3 \le 1000 \\
x_1 \le 200 \\
x_2 \le 100 \\
x_3 \le 150 \\
x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{cases}
$$

Rezolvarea acestuia a condus la soluția optimă:

$$x_1^* = 171 \,,\ x_2^* = 0 \,,\ x_3^* = 143 \qquad (\max) f = 1598$$

Interpretarea soluției:

-Din reperul R_1, 171 bucăți se produc în cadrul firmei, restul de 29 bucăți se cumpără.
Cost: 25·171 + 31·29 = 4275 + 899 = 5174u.m.
- Reperul R_2 se cumpără în totalitate de pe piață.
Cost: 47·100 = 4700u.m.
- Din reperul R_3, 143 bucăți se produc în firmă şi celelalte 7 bucăți se cumpără:
Cost: 19·143 + 23·7 = 2717 + 161 = 2878u.m.

Costul total 5174 + 4700 + 2878 = 12752 = 14350- 1598

2. O bancă asigură clienților săi patru tipuri de credit cu următoarele dobânzi anuale:

Tip credit	Dobânda anuală
1	12%
2	20%
3	20%
4	10%

Tabel 1.2

Banca dispune de 250 milioane euro şi în stabilirea cotelor pe care le va repartiza fiecărui tip de credit ea va trebui să țină seama de următoarele condiții:

a) Tipul 1 trebuie să reprezinte cel puțin 55% din totalul creditelor de tipurile 1 şi 2 şi cel puțin 25% din totalul creditelor acordate (în milioane euro);
b) Tipul 2 nu trebuie să depăşească 25% din totalul creditelor acordate;
c) Dobânda medie a tuturor creditelor acordate nu trebuie să depăşească 15%.

Cum va trebui să procedeze banca pentru a-şi maximiza venitul din dobânzile la creditele acordate?

Modelul matematic

I) Identificarea mărimilor variabile. Vom nota

$x_i \equiv$ volumul creditelor de tipul *i* acordate, *i* =1,2,3,4 (în milioane euro)

II) Formalizarea criteriului de performanță în funcția obiectiv. Venitul băncii, din dobânzile la creditele acordate are expresia

$$f = 0{,}14x_1 + 0{,}20x_2 + 0{,}20x_3 + 0{,}10x_4 \quad \to \quad \max \tag{1}$$

III) Formalizarea condițiilor limitative în restricții

- totalul creditelor este plafonat la 250 milioane euro:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 250 \tag{2}$$

- formalizarea condiției a):

$$x_1 \ge 0{,}55(x_1 + x_2) \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}45x_1 + 0{,}55x_2 \le 0 \tag{3}$$

$$x_1 \ge 0{,}25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}75x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}25x_3 + 0{,}25x_4 \le 0 \tag{4}$$

- formalizarea condiției b):

$$x_2 \le 0{,}25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}25x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}25x_3 - 0{,}25x_4 \le 0 \tag{5}$$

- formalizarea condiției c):

$$\frac{0{,}14x_1 + 0{,}20x_2 + 0{,}20x_3 + 0{,}10x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \le 0{,}15 \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}01x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}05x_3 - 0{,}05x_4 \le 0 \tag{6}$$

IV) Condiții explicite impuse variabilelor:

$$x_i \ge 0 \quad i = 1,..,4 \quad \text{(eventual întregi dacă nu se admit fracțiuni de milion!)} \tag{7}$$

Reunind (1) – (7) şi operând simplificări evidente se obține modelul liniar:

$$\begin{cases} (\max) f = 7x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 5x_4 \\ x_1 + \quad x_2 + \; x_3 + \; x_4 \leq 250 \\ -9x_1 + 11x_2 \qquad\qquad \leq \; 0 \\ -3x_1 + \quad x_2 + \; x_3 + \; x_4 \leq \; 0 \\ -x_1 + \; 5x_2 + 5x_3 - 5x_4 \leq \; 0 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Pentru rezolvare s-a folosit un utilitar care a produs următoarea soluție „întreagă”:

Tip credit	Volum (milioane euro)
1	65
2	51
3	48
4	86
Total	250

Tabelul 1.3

Tipul 1 reprezintă 56% din totalul creditelor de tipurile 1 şi 2 şi 26% din totalul tuturor creditelor. Tipul 2 reprezintă numai 20,4% din total credite. În fine, dobânda medie la creditele acordate este de 15%. Venitul din dobânzi al băncii se ridică la 37,5 milioane euro.

3. GODAC este o mică firmă specializată în comercializarea cărnii şi a produselor din carne. Printre alte produse se oferă clienților carne tocată în amestec din carne slabă de vită şi carne de porc. Un kg de carne de vită pentru tocat conține 80% carne şi 20% grăsime şi se vinde cu 24lei/kg. Kilogramul de carne de porc conține 68% carne şi 32% grăsime şi se vinde cu 18 lei. În ce proporție vor fi amestecate carnea de vită şi carnea de porc astfel încât:
- procentul de grăsime în amestec să nu depăşească 25%;
- prețul unui kg de carne tocată în amestec să fie cât mai mic.

Se va presupune că toate costurile legate de tocare şi amestecare (omogenizare) sunt neglijabile sau au fost deja incluse în prețurile constituenților.

Modelul matematic

I) Identificarea mărimilor variabile. Întrebarea din enunț „**în ce proporție** vor fi amestecate cele două sortimente de carne astfel încât..” conduce la notațiile:

$x_1 \equiv$ **fracția** dintr-un kilogram de amestec reprezentată de carnea de vită;
$x_2 \equiv$ **fracția** dintr-un kilogram de amestec reprezentată de carnea de porc;

II) Formalizarea condițiilor limitative în restricții. Din definiția variabilelor modelului rezultă egalitatea:

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad (1)$$

Limitarea procentului de grăsime din amestec conduce la inegalitatea:

$$0{,}20x_1 + 0{,}32x_2 \le 0{,}25 \qquad (2)$$

III) Formalizarea criteriului de performanță în funcția obiectiv. Prețul unui kg de amestec are expresia:

$$f = 24x_1 + 18x_2 \quad \to \quad \min \qquad (3)$$

IV) Condiții explicite impuse variabilelor.

$$x_1 \ge 0 \,,\, x_2 \ge 0 \qquad (4)$$

(desigur, x_1 şi x_2 trebuie să fie subunitare dar această limitare este asigurată prin (1) şi (4))

Eliminăm variabila x_2 : $x_2 = 1 - x_1$.

$$(2) \Rightarrow 0{,}20x_1 + 0{,}32(1 - x_1) \le 0{,}25 \;\Rightarrow\; 0{,}12x_1 \ge 0{,}07 \Rightarrow x_1 \ge {}^{0,07}\!/_{0,12} = 0{,}583$$

$$(3) \Rightarrow f = 24x_1 + 18(1 - x_1) = 18 + 6x_1$$

$$(4) \Rightarrow x_1 \ge 0 \,,\, 1 - x_1 \ge 0 \Rightarrow 0 \le x_1 \le 1$$

Programul (1) – (4) se reduce la programul într-o singură variabilă:

$$\begin{cases} (\min) f = 18 + 6x_1 \quad \Leftrightarrow \quad \min\ 6x_1 \\ 0{,}583 \le x_1 \le 1 \end{cases}$$

cu soluția $x_1^* = 0{,}583 \quad (\min) f = 21{,}50$. Prin urmare amestecul cel mai iefin ar costa 21,50 lei/kg şi ar contine 58,3% carne de vită şi restul carne de porc.

4. O mică firmă produce bunurile alimentare G_1, G_2, G_3 folosind trei materii prime agricole de bază R_1, R_2, R_3. Necesarul de resurse, în kg, pentru realizarea unui kilogram din fiecare din bunurile G_1, G_2, G_3 sunt indicate în tabelul 1.4.

Bunuri / Resurse	G_1	G_2	G_3
R_1	2	4	5
R_2	1	3	2
R_3	2	1	1

Tabelul 1.4

Pentru ziua următoare există în stoc 45 kg din R_1, 30 kg din R_2 şi 20 kg din R_3.Profiturile sunt de 7, 9, 12 unități monetare pe kilogramul din G_1, G_2, respectiv G_3. Firma livrează bunul G_1 în cutii de ½ kg, bunul G_2 în cutii de 1 kg şi bunul G_3 în cutii de 2 kg iar desfacerea este asigurată pentru tot ceeace se produce.

1) Scrieți un program liniar pentru determinarea programului de activitate al firmei în ziua următoare având ca obiectiv maximizarea profitului.
2) Cum se modifică programul inițial dacă din bunul G_1 nu trebuie să se facă mai mult de zece cutii?
3) Cum se modifică programul inițial dacă din bunul G_1 se pot face cel mult zece cutii iar din G_2 cel puțin trei?
4) Deoarece resursele R_1, R_2, R_3 sunt foarte perisabile firma este interesată în a le valorifica cât mai bine. Cum se poate modela acest deziderat?

1) Modelul matematic

I) Identificarea mărimilor variabile. Fără îndoială, mărimile variabile ale acestei situații sunt "ce se va produce" în ziua următoare din G_1,G_2,G_3 cu resursele existente în stoc. Consumurile de resurse sunt calculate la kg de produs finit însă forma finală de prezentare a bunurilor este "în cutii", astfel că în evaluarea producției ce urmeză a fi realizate bunurile vor fi măsurate în cutii. În consecință, variabilele modelului vor fi:

x_i = numărul de cutii conținând bunul G_i ce urmează a fi produse din resursele existente.

II) Identificarea condițiilor limitative şi formalizarea lor în restricții. Având în vedere notațiile introduse, bunurile G_1,G_2,G_3 vor fi produse atunci în cantitățile (în kg) $\frac{1}{2}x_1, x_2$ respectiv $2x_3$ kg. Încadrarea consumurilor de resurse în stocurile disponibile conduce la restricțiile:

$$2\cdot\frac{1}{2}x_1 + 4\cdot x_2 + 5\cdot 2x_3 \leq 45 \tag{1}$$

$$1\cdot\frac{1}{2}x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot 2x_3 \leq 30 \tag{2}$$

$$2\cdot\frac{1}{2}x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot 2x_3 \leq 20 \tag{3}$$

III) Identificarea criteriului de performanță şi formalizarea lui în funcția obiectiv. Se urmăreşte maximizarea profitului a cărui expresie este $7\cdot\frac{1}{2}x_1 + 9\cdot x_2 + 12\cdot 2x_3$ u.m.

IV) Condiții explicite impuse variabilelor modelului. Condițiile de nenegativitate sunt evidente:

$$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ ,\ x_3 \geq 0$$

la care se adaugă condiția

$$x_1, x_2, x_3 \text{ întregi}$$

deoarece produsele finale sunt măsurate în unități **indivizibile** (nu se poate produce o "fracție" dintr-o cutie…) În final se obține programul liniar:

$$(P_1)\begin{cases} (\max) f = 3{,}5x_1 + 9x_2 + 24x_3 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 45 \\ 0{,}5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 30 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \ \text{(intregi)} \end{cases}$$

2) La modelul (P_1) se adaugă restricția $x_1 \leq 10$ obținându-se programul (P_2)
3) La modelul (P_1) se adaugă restricțiile $x_1 \leq 10, x_2 \geq 3$ obținându-se programul (P_3)
4) În notațiile modelului (P_1) cantitățile de resurse neconsumate au expresiile:

$$\begin{aligned}
&\text{resursa } R_1:\ 45-(x_1+4x_2+10x_3)\geq 0\\
&\text{resursa } R_2:\ 30-(0{,}5x_1+3x_2+4x_3)\geq 0\\
&\text{resursa } R_3:\ 20-(x_1+x_2+2x_3)\geq 0
\end{aligned}$$

Valorificarea celor trei resurse este cu atât mai bună cu cât diferențele de mai sus sunt mai mici. Vom realiza acest lucru minimizând cea mai mare dintre diferențe:

$$\begin{cases}
\qquad (\min) y\\
\text{unde}\\
\qquad y=\max\{45-(x_1+4x_2+10x_3), 30-(0{,}5x_1+3x_2+4x_3), 20-(x_1+x_2+2x_3)\}\\
\text{si}\quad x_1, x_2, x_3 \text{ satisfac toate relatiile modelului (P)}
\end{cases}$$

Pentru a transforma noul model într-un program liniar uzual înlocuim relația de definiție a variabilei y cu inegalitățile*:*

$$\begin{aligned}
&45-(x_1+4x_2+10x_3)\leq y\\
&30-(0{,}5x_1+3x_2+4x_3)\leq y\\
&20-(x_1+x_2+2x_3)\leq y
\end{aligned}$$

Tot din relația de definiție a lui y rezultă că dacă x_1, x_2, x_3 sunt întregi atunci y este sau un număr întreg sau un număr cu partea fracționară 0,5; în consecință, numărul $z = 2y$ va fi cu siguranță întreg. Înlocuind mai sus $y = z/2$ obținem programul liniar:

$$(P_4)\begin{cases}
(\min) 0{,}5z\\
x_1+4x_2+10x_3\leq 45\\
0{,}5x_1+3x_2+4x_3\leq 30\\
x_1+x_2+2x_3\leq 20\\
x_1+4x_2+10x_3+0{,}5z\geq 45\\
0{,}5x_1+3x_2+4x_3+0{,}5z\geq 30\\
x_1+x_2+2x_3+0{,}5z\geq 20\\
x_1, x_2, x_3, z\geq 0 \text{ (intregi)}
\end{cases}$$

Analiza comparativă a soluțiilor optime. În tabelul 1.5 sunt prezentate soluțiile optime întregi ale modeleor $P_1 – P_4$.

Cel mai mare profit care s-ar obține din resursele date este de 121 u.m.; această valoare poate fi luată ca punct de referință. Soluția corespunzătoare are unele inconveniente: nu produce bunul G_2 şi aproape o treime din resursa R_2 nu se consumă. Încercarea de diversificare a producției – vezi soluțiile modelelor (P_2) şi (P_3) - reduce profitul cu câteva procente şi duce la creşterea cantităților de resurse neutilizate. Ultima "propunere" de plan de activitate asigură o utilizare aproape totală a resurselor disponibile iar profitul aferent este foarte aproape de nivelul maxim posibil. Totuşi ea nu prevede producerea bunului G_3 şi acest lucru s-ar putea să conteze în decizia finală, decizie care va trebui să țină seama şi de cererea pentru acest bun.

Model	Programul optim de activitate Cantitatea de produs – în cutii şi kg – din:						Resurse consumate (în kg şi % din stocurile disponibile)						Profit	
	G_1		G_2		G_3		R_1		R_2		R_3			
	Cutii	kg	Cutii	kg	Cutii	kg	kg	%	kg	%	kg	%	u.m.	%
P_1	**14**	7	**-**	-	**3**	6	44	97,8	19	63,3	20	100	121	100
P_2	**10**	5	**1**	1	**3**	6	44	97,8	20	66,7	17	85	116	95,9
P_3	**9**	4,5	**4**	4	**2**	4	45	100	24,5	81,7	17	80	115,5	85
P_4	**12**	6	**8**	8	**-**	-	44	97,8	30	100	20	100	114	94,2

Tabelul 1.5

5. Gheorghe este un tânăr fermier (româno – european) specializat în cultura grâului, a porumbului şi a sfeclei de zahăr. El are 500 ha de pământ arabil şi în această iarnă trebuie să decidă ce suprafață de teren va aloca fiecărei culturi.

Pentru necesitățile fermei (casă, animale, păsări) Gheorghe are nevoie de 200t de grâu şi 240t de porumb pe care le asigură din recoltă sau cumpărând de pe piață. Tot ce depăşeşte nevoile fermei se vinde la prețul pieței. Tona de grâu se vinde cu 170€ iar tona de porumb cu 150€ numai că la cumpărare Gheorghe trebuie să plătească cu 40% mai mult pe tonă pentru transport.

O cultură profitabilă este sfecla de zahăr care se vinde cu 36€ pe tonă. Însă în UE există o reglementare pentru prevenirea producerii unei cantități prea mari de sfeclă de zahăr: în cazul lui Gheorghe, orice cantitate ce depăşeşte limita de 6000t va putea fi vândută cu numai 10€ pe tonă.

Muncind vârtos şi cu ajutorul lui D-zeu, Gheorghe crede şi ia în calcul o recoltă medie de 2,5t grâu, 3t de porumb şi 20t de sfeclă de zahăr la hectar.

Costurile legate de însămânțare, întreținere şi recoltare a celor trei culturi sunt de 150€ la grâu, 250€ la porumb şi 260€ la sfecla de zahăr la hectar.

Cum ar trebui să-şi împartă Gheorghe pământul pentru ca la finele toamnei următoare câştigul său să fie maxim?

Datele problemei sunt sistematizate în următorul tabel:

	Grâu	Porumb	Sfeclă de zahăr
Recoltă medie (t/ha)	2,5	3	20
Cost de producție (€/ha)	150	250	260
Prețul pieței (€/t)	170	150	36 sub 6000t 10 peste 6000t
Preț de achiziție(€/t) (Se adaugă 40% pt transport)	170+68=238	150+60=210	-
Necesar pt. nevoile fermei (t)	200	240	-

Tabelul 1.6

Modelul matematic.

I) Identificarea mărimilor variabile.

x_1 ≡ suprafața de teren alocată cultivării grâului (ha);
x_2 ≡ suprafața de teren alocată cultivării porumbului (ha);
x_3 ≡ suprafața de teren alocată cultivării sfeclei de zahăr(ha);
y_1 ≡ cantitatea de grâu vândută (t);
y_2 ≡ cantitatea de porumb vândută (t);
y_3 ≡ cantitatea de sfeclă de zahăr vândută la prețul maxim (t);
y_4 ≡ cantitatea de sfeclă de zahăr vândută la prețul minim (t);
z_1 ≡ cantitatea de grâu cumpărată (t);
z_2 ≡ cantitatea de porumb cumpărată (t);

II) Identificarea criteriului de performanță şi formalizarea lui în funcția obiectiv
Avem următoarea ecuație de balanță:

Profit ≡ Venitul rezultat din vânzarea unor cantități din producția realizată - Costul total de producție - Costul cantităților de cereale cumpărate de pe piață

în care:

Venitul rezultat din vânzarea unor cantități din producția realizată = $170y_1 + 150y_2 + 36y_3 + 10y_4$

Costul total de producție = $150x_1 + 250x_2 + 260x_3$

Costul cantităților de cereale cumpărate de pe piață = $238z_1 + 210z_2$

În consecință, funcția obiectiv va avea expresia:

$$f = 170y_1 + 150y_2 + 36y_3 + 10y_4 - 150x_1 - 250x_2 - 260x_3 - 238z_1 - 210z_2 \quad \to \quad \max \qquad (1)$$

III) Identificarea condițiilor limitative şi formalizarea lor în restricții.

- **suprafața totală a terenului agricol este limitată** la 500ha:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \tag{2}$$

- **asigurarea necesarului de grâu** pentru nevoile fermei:

cantitatea de grâu recoltată + cantitatea de grâu cumpărată - cantitatea de grâu vândută ≥ 200

sau

$$2{,}5x_1 + z_1 - y_1 \geq 200 \tag{3}$$

- **asigurarea necesarului de porumb** pentru nevoile fermei. Raționând analog obținem restricția:

$$3x_2 + z_2 - y_2 \geq 240 \tag{4}$$

- **producția de sfeclă de zahăr se vinde în întregime**:

$$20x_3 = y_3 + y_4 \tag{5}$$

- **cantitatea de sfeclă de zahăr vândută la prețul maxim nu trebuie să depăşească limita** de 6000t:

$$y_3 \leq 6000 \tag{6}$$

IV) Condiții explicite impuse variabilelor:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0\ ;\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0\ ;\ z_1, z_2 \geq 0 \tag{7}$$

Reunind relațiile (1) – (7) obținem modelul matematic cerut care este un program liniar cu 9 variabile şi 6 restricții.
Folosind un utilitar a rezultat soluția optimă:

$x_1^* = 120$, $x_2^* = 80$, $x_3^* = 300$, $y_1^* = 100$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = 6000$, $y_4^* = 0$, $z_1^* = 0$, $z_2^* = 0$
$\max f = 117000$

cu următoarea interpretare:

- întregul teren agricol este folosit: 120ha pentru grâu, 80ha pentru porumb şi restul de 300ha pentru sfecla de zahăr.
- în caz că producțiile la hectar sunt cele scontate s-ar obține 300t de grâu din care 100t se valorifică pe piață, 240t de porumb, cât este necesar pentru nevoile fermei şi 6000t de sfeclă vândute la prețul maxim.
- din vânzarea grâului şi a sfeclei s-ar câştiga 233000€; cheltuielile însumează 116000€, astfel că profitul fermierului ar fi de 117000€.

6. Steven este proprietarul unei ferme moştenite de la părinți. În următorul an agricol, Steven şi ai lui şi-au propus să cultive soia, porumb şi ovăz şi să crească vaci de lapte şi găini ouătoare.Ferma are 100 acri de teren, cotețele pot adăposti până la 3000 păsări iar în grajduri pot fi adăpostite cel mult 32 de animale. Pentru cheltuieli, Steven a prevăzut un buget de $40000. Forța de muncă, asigurată de membrii familiei, însumează 3600 om·ore în aşa numita perioadă de iarnă (15 Sept. – 15 mai) şi 4100 om·ore în perioada de vară. Fiecare om·oră neutilizată în fermă este valorificată de către tineretul familiei într-o fermă vecină cu $5 iarna şi $6 vara.
Costul anual al întreținerii unei vaci este de $1200 iar al unei găini de $9. În plus fiecare vacă are nevoie de 1,5 acri de păşune, 100 om·ore de muncă iarna şi 50 om·ore de muncă vara.Pentru o pasăre sunt necesare în medie 0,6 om·ore iarna şi 0,3 om·ore vara. Fiecare vacă aduce un venit anual net de $1000 iar o găină de numai $5. Terenul fermei trebuie folosit în întregime atât pentru culturi cât şi pentru păşune.
Pentru cele trei culturi, necesarul de forță de muncă (în om·ore) şi venitul net (în $) pe acru sunt date în următorul tabel:

	Soia	Porumb	Ovăz
Necesar forță de muncă iarna	20	35	10
Necesar forță de muncă vara	50	75	40
Venit net	600	900	450

Tabelul 1.7

Steven doreşte să ştie ce suprafețe din terenul fermei va aloca celor trei culturi şi câte vaci şi păsări va creşte pentru ca venitul net al familiei sale să fie maxim.

Modelul matematic.

I) Identificarea mărimilor variabile ale modelului. Acestea rezultă uşor din finalul enunțului:

$x_1 \equiv$ suprafața de teren cultivată cu soia (acri);
$x_2 \equiv$ suprafața de teren cultivată cu porumb (acri);
$x_3 \equiv$ suprafața de teren cultivată cu ovăz (acri);
$y \equiv$ numărul vacilor de lapte;
$z \equiv$ numărul de găini ouătoare.

II) Identificarea condițiilor limitative şi formalizarea acestora în restricții

- **repartizarea suprafeței de teren disponibile**. Pe lângă suprafețele alocate celor trei culturi, este necesar şi un teren pentru păşunat în suprafață de $1{,}5y$ acri. Rezultă restricția:

$$x_1 + x_2 + x_3 + 1{,}5y = 100 \qquad (1)$$

- **repartizarea bugetului de cheltuieli**.Acesta este folosit pentru întreținerea animalelor şi a păsărilor:

$$1200y + 9z \le 40000 \qquad (2)$$

- **repartizarea forței de muncă**. Aceasta este folosită la întreținerea culturilor dar şi la îngrijirea animalelor şi păsărilor în cele două perioade, de iarnă şi de vară.

Iarna: $$20x_1 + 35x_2 + 10x_3 + 100y + 0{,}6z \le 3600 \qquad (3)$$

Vara: $$50x_1 + 75x_2 + 40x_3 + 50y + 0{,}3z \le 4100 \qquad (4)$$

- **utilizarea spațiilor de adăpostire a animalelor şi a păsărilor**.

$$y \le 32 \qquad (5)$$

$$z \le 3000 \qquad (6)$$

III) Identificarea criteriului de performanță şi formalizarea lui în funcția obiectiv

Venitul net total are trei componente:

- venitul rezultat din cele trei culturi: $600x_1 + 900x_2 + 450x_3$;
- venitul rezultat din creşterea animalelor şi a păsărilor: $1000y + 5z$
- venitul rezultat din valorificarea forței de muncă neutilizată în fermă (iarna şi vara):

$$5(3500 - 20x_1 - 35x_2 - 10x_3 - 100y - 0{,}6z) + 6(4000 - 50x_1 - 75x_2 - 40x_3 - 50y - 0{,}3z) =$$
$$= 41500 - 400x_1 - 625x_2 - 290x_3 - 800y - 4{,}8z$$

Urmează că venitul net total are expresia:

$$41500 + 200x_1 + 275x_2 + 160x_3 + 200y + 0{,}2z$$

Ignorând constanta 41500 rezultă următoarea funcție obiectiv:

$$f = 200x_1 + 275x_2 + 160x_3 + 200y + 0{,}2z \to \max \qquad (7)$$

IV) Condiții explicite impuse mărimilor variabile:

$$x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0\,,\ x_3 \ge 0\,;\ y \ge 0\,;\ z \ge 0 \qquad (8)$$

Modelul matematic al problemei date se compune din relațiile (1) – (8).
Folosind un utilitar, s-a găsit soluția optimă:

$$x_1^* = 26{,}316\,,\ x_2^* = 0\,,\ x_3^* = 24{,}211\,,\ y^* = 26316\,,\ z^* = 0 \qquad (\max) f = 16400$$

Din motive evidente, variabilele ar trebui să aibe valori întregi – mai cu seamă y şi z ! Rotunjind atent, s-a obținut soluția:

$$x_1^0 = 36 \, , \, x_2^0 = 0 \, , \, x_3^0 = 25 \, , \, y^0 = 26 \, , \, z^0 = 0$$

cu aceeaşi valoare pentru funcția obiectiv. Lăsăm în seama cititorului interpretarea soluției.

7. Un avion de transport are trei compartimente pentru aşezarea mărfurilor: față, centru şi spate. Compartimentele au următoarele limitări în ceeace priveşte greutatea şi volumul mărfurilor încărcate:

	Compartiment	Greutate (t)	Volum (m^3)
1.	Față	10	6800
2.	Centru	16	8700
3.	Spate	8	5300

Tabelul 1.8

Pentru asigurarea stabilității avionului în zbor, greutățile mărfurilor încărcate în cele trei compartimente trebuie să fie proporționale cu greutățile maxim admise.

Pentru următorul zbor sunt disponibile patru categorii de mărfuri. În tabelul 1.9 sunt date greutățile mărfurilor (în tone), volumul specific al acestora (în m^3/t) şi profitul transportatorului (în \$/t). Se acceptă transportarea oricărei cantități din aceste mărfuri. Se admite că volumul este proporțional cu greutatea acceptată.

Marfa	Greutate (t)	Volum specific (m^3/t)	Profit (\$/t)
1	18	480	310
2	15	650	380
3	23	580	350
4	12	390	285

Tabelul 1.9

Ce cantități din cele patru mărfuri vor fi transportate şi cum vor fi distribuite acestea distribuite în cele trei compartimente ale avionului astfel încât profitul transportatorului să fie maxim?

Modelul matematic

I) Identificarea mărimilor variabile. Iată un caz în care utilizarea variabilelor dublu indexate se impune. Vom nota:

$x_{ij} \equiv$ cantitatea (în tone) din marfa i = 1,2,3,4 încărcată în compartimentul j , j = 1 (față) , j = 2 (centru) , j = 3 (spate).

II) Identificarea condițiilor limitative şi formalizarea lor în restricții.

- pentru fiecare marfă, cantitatea încărcată în cele trei compartimente nu depăşeşte cantitățile disponibile pentru transport:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 18 \qquad (1)$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 15 \qquad (2)$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 23 \qquad (3)$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} \le 12 \qquad (4)$$

- în fiecare compartiment, greutatea totală a mărfurilor de diferite tipuri încărcate nu trebuie să depăşească greutatea maxim admisă:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \le 10 \qquad (5)$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \le 16 \qquad (6)$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \le 8 \qquad (7)$$

- în fiecare compartiment, volumul total al mărfurilor încărcate, de diferite tipuri nu trebuie să depăşească volumul maxim admis:

$$480x_{11} + 650x_{21} + 580x_{31} + 390x_{41} \le 6800 \qquad (8)$$
$$480x_{12} + 650x_{22} + 580x_{32} + 390x_{42} \le 8700 \qquad (9)$$
$$480x_{13} + 650x_{23} + 580x_{33} + 390x_{43} \le 5300 \qquad (10)$$

- greutățile mărfurilor încărcate în cele trei compartimente trebuie să fie proporționale cu greutățile maxim admise:

$$\frac{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}}{10} = \frac{x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}}{16} = \frac{x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}}{8}$$

Punem aceste relații în forma echivalentă:

$$16x_{11} + 16x_{21} + 16x_{31} + 16x_{41} - 10x_{12} - 10x_{22} - 10x_{32} - 10x_{42} = 0 \qquad (11)$$
$$8x_{11} + 8x_{21} + 8x_{31} + 8x_{41} - 10x_{13} - 10x_{23} - 10x_{33} - 10x_{43} = 0 \qquad (12)$$

III) Formalizarea criteriului de performanță în funcția obiectiv. Maximizarea profitului transportatorului conduce la funcția:

$$\begin{aligned}(\max) f = 310(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 380(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + \\ + 350(x_{31} + x_{32} + x_{33}) + 285(x_{41} + x_{42} + x_{43})\end{aligned} \qquad (13)$$

IV) Condiții explicite impuse variabilelor.

$$x_{ij} \ge 0 \quad i = 1,2,3,4\,;\; j = 1,2,3 \qquad (14)$$

Modelul (1) – (14) are 12 variabile şi 12 restricții. Rezolvarea sa (cu un utilitar) a condus la soluția optimă din tabelul 1.10

Marfa / Compartiment	1	2	3	4	Greutatea mărfurilor încărcate în compartiment	Volumul mărfurilor încărcate în compartiment
Față	-	7	3	-	10	6300
Centru	-	-	13	3	16	8700
Spate	-	8	-	-	8	5200
Greutatea totală încărcată	-	15	16	3		

Tabelul 1.10

Avionul este încărcat la greutatea maximă de 34t. Profitul aferent este de \$ 12155.

8. Din bare cu lungimea 100 dm trebuie tăiate bare mai mici cu lungimile 47,31 şi 19 dm în cantitățile 15, 21 respectiv 40 bucăți. Scrieți un program liniar pentru realizarea comenzilor specificate cu un consum minim de bare cu lungimea 100 dm.

Modelul matematic

I) Identificarea mărimilor variabile. Dacă în problemele precedente mărimile variabile erau efectiv prezente în enunț ,aşteptând doar să fie recunoscute şi notate, în cazul de față lucrurile sunt mai complicate: din enunț lipsesc informațiile privind modalitățile de tăiere a barelor lungi în bare mai scurte. Aceste modalități de tăiere se numesc **rețete de croire** şi multiplicitățile de folosire a lor vor fi variabilele modelului!

O rețetă de croire se va zice **maximală** dacă din restul ei nu se mai poate croi nici una din barele (mai mici) cerute. Lista rețetelor maximale este dată în tabelul 1.11

Rețeta	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
47 dm	2	1	1	-	-	-	-
31 dm	-	1	-	3	2	1	-
19 dm	-	1	2	-	2	3	5
Rest (dm)	6	3	15	7	0	12	5

Tabelul 1.11

Notăm

$$x_j \equiv \text{ numărul barelor lungi de 100 dm tăiate după rețeta } R_j,\ j = 1,...,7$$

II) Formalizarea condițiilor limitative în restricții Barele cu lungimea de 47 dm se obțin numai din aplicarea rețetelor R_1 , R_2 , R_3. Din tăierea a x_1 bare de 100 dm după rețeta R_1 se obțin $2x_1$ bare de 47 dm. Aplicând şi rețetele R_2 şi R_3 de x_2 respectiv x_3 ori se mai obțin- separat - cantitățile x_2 şi x_3 de bare de 47 dm. În consecință, din procesul de tăiere rezultă un total de $2x_1 + x_2 + x_3$ bare de 47 dm care trebuie să acopere cele 15 bucăți cerute:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 15 \qquad (1)$$

Realizarea cantităților de bare de 31 dm şi de 19 dm conduce la inegalitățile:

$$x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 21 \qquad (2)$$

$$x_2 + 2x_3 + 2x_5 + 3x_6 + 5x_7 \geq 40 \qquad (3)$$

III) Formalizarea criteriului de performanță în funcția obiectiv. Se urmăreşte minimizarea numărului de bare de 100 dm tăiate:

$$(\min) f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \qquad (4)$$

IV) Condiții explicite impuse variabilelor:

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 7 \quad \text{şi întregi} \qquad (5)$$

Reunind (1) – (5) se obține un program liniar cu trei restricții şi şapte variabile.

Observație: O soluție acceptabilă pentru problema dată se obține astfel.

Calculăm lungimea totală a barelor cerute: 15·47 + 21·31 + 40·19 = 2116 dm. Rezultă imediat că pentru satisfacerea comenzilor trebuie tăiate cel puțin $\left\lceil \frac{2116}{100} \right\rceil = 22$ bare de 100 dm. Am putea folosi rețeta R_2 de 15 ori apoi rețeta R_6 de 6 ori şi la urmă rețeta R_7 de două ori obținând cantitățile cerute şi un surplus de 3 bare de 19 dm.Se folosesc 15 + 6 + 2 = 23 bare lungi. Resturile procesului de tăiere însumează 23·100 – 2116 = 184 dm reprezentând 8% din lungimea barelor tăiate. Deşi poate fi apreciată ca foarte bună, această soluție nu este optimă; se poate arăta că sunt suficiente 22 de bare de 100 dm pentru a croi toate barele mai mici, resturile reprezentând numai 3,82% din ce s-a tăiat.. Invităm cititorul să găsească soluția optimă.

Probleme propuse

Atenție: Pentru problemele de optimizare care urmează se cere deocamdată numai modelul matematic. Determinarea soluțiilor optime se va face după însuşirea metodei de rezolvare a programelor liniare.

1. O firmă de construcții a câştigat un contract cu primăria pentru realizarea unui complex de locuințe însumând cel puțin 900 G (≡garsoniere), 2000 A_2 (≡ apartamente cu 2 camere) şi 1400 A_3 (≡ apartamente cu 3 camere). Se preconizează construirea a două tipuri de blocuri. Primul tip cuprinde 40 A_3 , 30 A_2 şi 10 G având un cost de 60 milioane euro. Al doilea tip costă 75 milioane euro şi cuprinde 20 A_3 , 50 A_2 şi 30 G. Câte blocuri din fiecare tip ar trebui construite pentru ca prevederile contractuale să fie realizate cu costuri minime?

2. Firma X, producătoare de echipamente sportive şi accesorii intenționează să lanseze pe piață un nou model de sac de golf în două variante: varianta standard (S) şi varianta de lux (L).Distribuitorul firmei a apreciat în mod deosebit noile produse şi a declarat că preia, în vederea desfacerii, întreaga producție a firmei pe următoarele trei luni.Serviciul producție a stabilit principalele operații necesare fabricării sacilor de golf precum şi timpul necesar efectuării fiecărei operații- vezi tabelul 1.12

Operații / Produs	Timpi de execuție (min/sac)			
	Croire. Vopsire	Cusături	Finisaje	Control de calitate Ambalare
Varianta standard S	42	30	60	6
Varianta de lux L	60	50	40	15

Tabelul 1.12

Analizând situația încărcării utilajelor şi a forței de muncă în următoarele trei luni acelaşi serviciu a stabilit că sunt disponibile:

630 ore pentru croire şi vopsire;
600 ore pentru cusături;
708 ore pentru finisaje;
135 ore pentru controlul de calitate şi ambalare.

Serviciul contabilitate a stabilit un profit de \$10 pentru un sac în varianta S şi de \$9 pentru un sac în varianta L.
Problema conducerii firmei este de a stabili câți saci de golf vor fi realizați în varianta standard şi câți în cea de lux pentru ca profitul să fie maxim.

3. Compania de aviație "Struțul zburător" doreşte să achiziționeze noi avioane de transport călători pe distanțe mici, medii şi lungi (cele trei tipuri de avioane sunt codificate MIC, MED şi LUN). Prețurile actuale sunt de 33,5; 25 şi 17.5 milioane euro pentru un avion de tipul LUN, MED şi respectiv MIC. Conducerea a autorizat folosirea a cel mult 500 milioane euro pentru cumpărarea noilor aparate. Experții firmei sunt de părere că indiferent de tipul şi numărul avioanelor achiziționate acestea vor fi folosite la capacitatea maximă şi în consecință profiturile anuale ale companiei ar putea fi de 2,1; 1,5 şi 1,15 milioane euro pe fiecare avion nou de tipul LUN, MED respectiv MIC. S-a estimat că numărul piloților angajați şi instruiți de către companie va fi suficient pentru cumpărarea a cel mult 16 avioane. Întreținerea unui avion de tipul LUN respectiv MED costă de $5/3$ respectiv $4/3$ ori mai mult decât întreținerea unui avion MIC iar serviciile de specialitate ale companiei pot întreține un număr de avioane noi echivalent cu întreținerea a 40 avioane de tipul MIC. Conducerea companiei doreşte să ştie câte avioane din fiecare tip ar trebui să cumpere în vederea maximizării profitului.

4. Vlad P. este un binecunoscut atlet din spațiul exsovietic care vizitează des Occidentul unde participă la diferite concursuri. De fiecare dată la întoarcere, Vlad cumpără o serie de obiecte ce nu se găsesc în țară pentru a le revinde cu un oarece profit.Cumpărăturile, de regulă blugi, cămăşi de mătase, CD playere şi CD-uri cu muzică heavy metal, sunt transportate cu un rucsac şi nu trebuie să depăşească 25 kg. Pentru a merge treaba bine, Vlad trebuie să țină seama de următoarele condiții:

- la fiecare CD player achiziționat el trebuie să cumpere cel puțin două CD-uri cu muzică;
- (cam) jumătate din amatorii de cămăşi de mătase vor, pe lângă cămaşă şi o pereche de blugi;
- din motive de control vamal, Vlad nu poate aduce mai mult de trei CD playere şi mai mult de zece CD-uri cu muzică.

Greutățile obiectelor şi profitul aşteptat sunt date în următorul tabel:

Obiect	Greutate (kg)	Profit (u.m.)
Blugi	1,500	200
Cămaşă de mătase	0,500	125
CD player	0,900	250
CD cu muzică	0,250	75

Tabel 13

Dați-i o mână de ajutor lui Vlad şi determinați combinația de obiecte care i-ar aduce profitul maxim. Se cere modelul matematic cu justificările de rigoare.

Bibliografie

Nica,V. T., Mustață, Fl., Mărăcine, V., Ciobanu, Gh., Cercetări Operaționale, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 1998

Hillier,F. S., Lieberman, G. J., Introduction to Operations Research, Mc Graw Hill Publishing Company, New York, ...,2001

Taha, A. H., Operations research. An Introduction, eight edition, Pearson Prentice Hall, 2007

Bronson, R., Naadimuthu, G., Theory and Problems of Operations Research, Tata Mc Graw Hill Publishing Company Limited, New Delhi, 2008

Unitatea de învățare 2

ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ
Proprietăți ale programelor liniare

Cuprins

2.1 Forma generală a unui program liniar
2.2 Studiul unui program liniar în două variabile
2.3 Concluzii generale rezultate din rezolvarea grafică a programelor liniare în două variabile
2.4 Forme speciale de prezentare a programelor liniare

Probleme propuse

2.1 Forma generală a unui program liniar

Reamintim că o problemă de programare matematică constă în maximizarea sau minimizarea unei funcții ale cărei variabile trebuie să satisfacă un set de egalități şi/sau inegalități. Inegalitățile trebuie să fie nestricte dintr-un motiv care va fi explicat mai târziu. Mai cu seamă în aplicațiile practice,variabilele nu pot lua decât anumite valori reale ca de exemplu numai valori nenegative.
Funcția de optimizat se numeşte **funcție obiectiv** iar relațiile necesar a fi îndeplinite de către variabile se numesc **restricții**.
O problemă de programare liniară sau pe scurt program liniar este o problemă de programare matematică în care funcția obiectiv şi restricțiile sunt liniare în variabilele problemei.

Exemplul 2.1 Exemple de programe liniare:

$$(P_1)\begin{cases}(\max) f = 50x_1 + 40x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 150 \\ \qquad\quad x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 0 \,,\, x_2 \ge 0\end{cases} \quad \text{(dat în introducere)} \quad (P_2)\begin{cases}(\min) f = 30x_1 + 50x_2 + 100x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 2 \\ 3x_1 - x_2 \qquad \le 3 \\ 5x_1 \qquad + x_3 \ge 4 \\ x_1 \text{ frs} \,;\, x_2 \le 0 \,;\, x_3 \ge 0\end{cases}$$

frs ≡fără restricție de semn(≡ orice valoare reală)

Putem presupune că toate variabilele unui program liniar satisfac condiția de nenegativitate:

$$x_j \ge 0$$

înlocuind la nevoie:

- o variabilă **nepozitivă** $x_j \le 0$ cu opusa ei $x'_j = -x_j \ge 0$
- o variabilă **fără restricție de semn** cu diferența a două variabile **nenegative**:

$$x_j = x'_j - x''_j \quad \text{cu} \quad x'_j \ge 0 \,,\, x''_j \ge 0$$

Exemplul 2.2 Transformăm programul (P_2) din exemplul 2.1 într-un program echivalent în care toate variabilele satisfac condiția de nenegativitate. Pentru aceasta facem substituțiile:

$$x_1 = x'_1 - x''_1 \;\; \text{cu} \;\; x'_1 \ge 0, x''_1 \ge 0 \;\; \text{şi} \;\; x_2 = -x'_2 \;\; \text{cu} \;\; x'_2 \ge 0$$

Obținem programul:

$$\begin{cases} (\min) f = 30x_1' - 30x_1'' - 50x_2' + 100x_3 \\ x_1' - x_1'' - 3x_2' + 2x_3 \geq 2 \\ 3x_1' - 3x_1'' + x_2' \leq 3 \\ 5x_1' - 5x_1'' + x_3 \geq 4 \\ x_1' \geq 0, x_1'' \geq 0, x_2' \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

În forma sa generală, un program liniar (P) constă din:

- ***n* variabile** reunite în vectorul $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$;
- ***m* restricții** liniare în variabilele $x_1, x_2, \cdots, x_n$ care pot fi egalități sau inegalități **nestricte**:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i \quad i = 1, \cdots, m \tag{1}$$

(în (1) *i* este indicele restricției; pentru fiecare $i = 1, \cdots, m$ este precizat unul din semnele $\leq$, $=$ sau $\geq$)

- **funcție obiectiv**, liniară în variabilele $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{2}$$

- **condiții de nenegativitate impuse tuturor variabilelor:**

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \cdots , \ x_n \geq 0 \tag{3}$$

Un ansamblu de valori numerice $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n)$ care satisfac restricțiile (1) se numeşte **soluție** a programului (P). Dacă în plus sunt verificate şi condițiile de nenegativitate (3) adică $\overline{x}_1 \geq 0, \overline{x}_2 \geq 0$, ..., $\overline{x}_n \geq 0$,vom spune că $\overline{x}$ este o **soluție admisibilă** a lui (P)
Vom nota cu $\mathcal{A}$ (sau cu $\mathcal{A}_P$ dacă este necesar) mulțimea soluțiilor admisibile ale programului (P). $\mathcal{A}$ este o submulțime a spațiului numeric R^n.
O soluție admisibilă $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ cu proprietatea:

$$f(x^*) = \max\{f(x) \ , \ x \in \mathcal{A}\} \text{ sau, după caz } f(x^*) = \min\{f(x) \ , \ x \in \mathcal{A}\}$$

se numeşte **soluție optimă** a programului (P).
În baza relației:

$$\min\{f(x) \ , \ x \in \mathcal{A}\} = - \max\{- f(x) \ , \ x \in \mathcal{A}\}$$

în considerațiile teoretice dezvoltate în continuare vom presupune că funcția obiectiv din (P) se **maximizează**.

Exemplul 2.3 Pentru programul liniar

$$(P)\begin{cases}(\max) f = 8x_1 - 6x_2 + 7x_3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 30 \\ 2x_1 + x_2 \geq 35 \\ x_1 + 3x_3 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\end{cases}$$

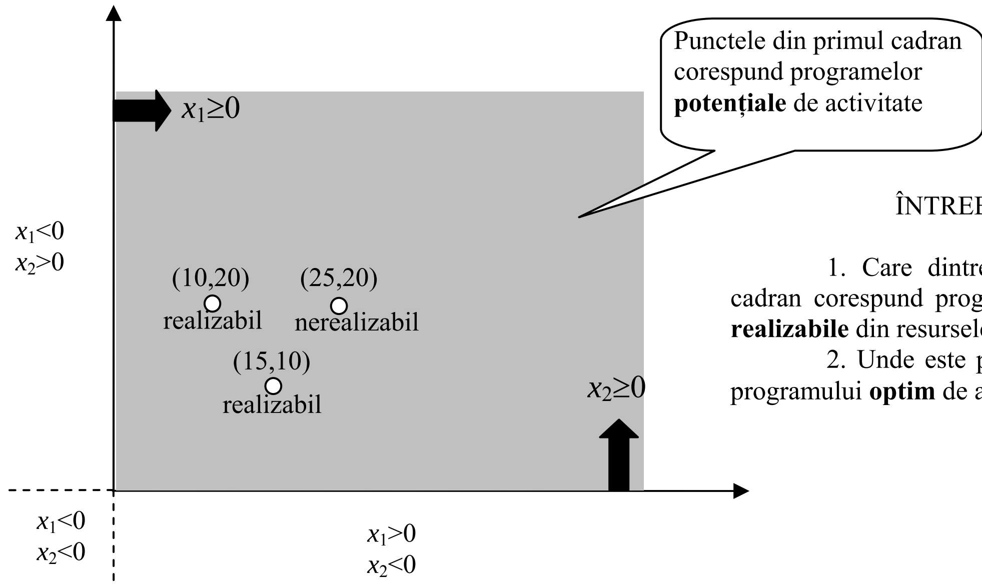
- ansamblul de valori numerice (vectorul) $\overline{x} = (15,5,-5) \Leftrightarrow \overline{x}_1 = 15$, $\overline{x}_2 = 5$, $\overline{x}_3 = -5$ este o soluție neadmisibilă;
- vectorul $\widetilde{x} = (14,16,2)$ este o soluție admisibilă care dă funcției obiectiv valoarea $f(\widetilde{x}) = 30$;
- vectorul $x^* = (13,9,0) \Leftrightarrow x_1^* = 13$, $x_2^* = 9$, $x_3^* = 0$ este unica soluție optimă a programului (P), oferind funcției obiectiv valoarea maximă $f(x^*) = 50$.

2.2 Studiul unui program liniar în două variabile

Ca şi în alte domenii ale matematicii, reprezentările şi interpretările geometrice au jucat un rol decisiv în stabilirea tuturor rezultatelor fundamentale ale programării matematice în general şi ale programării liniare în special.
Considerăm un program liniar în două variabile x_1, x_2: luăm ca exemplu modelul matematic al problemei firmei de calculatoare din unitatea de învățare 1 (exemplul 1.2):

$$(P_1)\begin{cases}(\max) f = 50x_1 + 40x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 150 \\ x_2 \leq 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 300 \\ x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0\end{cases}$$

Pentru un asemenea program avem posibilitatea vizualizării mulțimii soluțiilor sale admisibile identificând x_1 şi x_2 cu **abscisa** respectiv **ordonata** unui punct dintr-un plan raportat la un sistem de axe.Sunt necesare câteva rudimente de geometrie analitică.



ÎNTREBĂRI

1. Care dintre punctele primului cadran corespund programelor **admisibile**, **realizabile** din resursele date?
2. Unde este puctul corespunzător programului **optim** de activitate?

Figura 2.1

Având în vedere semnificația variabilelor x_1, x_2 punctele (x_1, x_2) în care $x_1<0$ sau $x_2<0$ nu au nici o interpretare economică logică. În schimb, punctele (x_1, x_2) cu $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ se pot identifica, firesc, cu programele **potențiale** de activitate pentru următoarea săptămână. Astfel:

- Punctul (15,10) corespunde „intenției” firmei de a produce 15 unități PC_1 şi 10 unități PC_2. Intenția este chiar **realizabilă**, cele trei resurse avute în vedere – timp pentru asamblare, monitoare PC_2 şi spațiul de depozitare – fiind mai mult decât suficiente:
  - **- necesar** de timp pt. asamblare $\equiv 3 \cdot 15 + 5 \cdot 10 = 85 < 150 \equiv$ timp **disponibil** pt. asamblare;
  - **- necesar** monitoare $PC_2 \equiv 10 < 20 \equiv$ **disponibil** monitoare PC_2;
  - **- necesar** spațiu de depozitare $\equiv 8 \cdot 15 + 5 \cdot 10 = 170 < 300 \equiv$ spațiu **disponibil** pentru depozitare.

  În caz de adoptare, acest plan ar aduce firmei un profit de $50 \cdot 15 + 40 \cdot 10 = \$1150$.

- Punctul (10,20) corespunde unei alte propuneri realizabile de program de activitate chiar mai bună decât precedenta deoarece ar aduce un profit superior: $50 \cdot 10 + 40 \cdot 20 = \$1300$. Acest plan ar utiliza integral resursa “monitoare PC_2”.

- În schimb, punctul (25,20) reprezintă o propunere de plan potențială dar nerealizabilă deoarece timpul necesar pentru asamblare ar depăşi timpul disponibil: $3 \cdot 25 + 5 \cdot 20 = 175 > 150$ (celelalte două resurse ar fi utilizate integral)

Se ridică firesc întrebările:

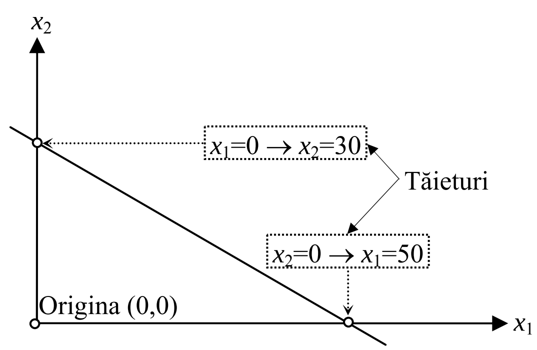
I) **Care sunt punctele corespunzătoare „intențiilor” de plan realizabile? Cum arată mulțimea lor?**
II) **Unde se găseşte punctul corespunzător programului realizabil cu cel mai mare profit (programul optim) şi cum se găseşte el?**
III) **Ce învățăminte s-ar putea trage pentru cazul general (mai mult de două variabile)?**

I) Răspundem la prima întrebare.

Determinăm punctele (x_1, x_2) cu $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ care satisfac prima restricție din (P1): $3x_1 + 5x_2 \leq 150$. Pentru aceasta reprezentăm în plan dreapta de ecuație $3x_1 + 5x_2 = 150$ - vezi figura 2.2. Punctele acestei drepte in care $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ corespund „intențiilor de plan” care utilizează integral timpul disponibil pentru asamblare. Din acest motiv, dreapta de ecuație $3x_1 + 5x_2 = 150$ se va numi în continuare dreapta „asamblare”.

Punctele (x_1, x_2) care satisfac inegalitatea $3x_1 + 5x_2 \leq 150$ constituie unul din cele două semiplane determinate de dreapta „asamblare”! Pentru identificarea lui va fi suficient să luăm un punct nesituat pe dreaptă – de exemplu origina (0,0) – şi să testăm satisfacerea restricției de către coordonatele punctului ales.În caz afirmativ, reținem semiplanul care conține punctul, altminteri reținem celălalt semiplan. Programele potențiale care satisfac prima restricție sunt vizualizate în figura 2.3.

.



Trasarea dreptei **„asamblare”** de ecuație $3x_1 + 5x_2 = 150$

Figura 2.2

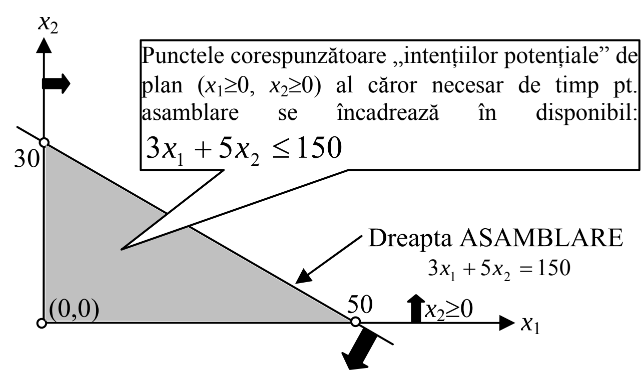


Figura 2.3

Procedăm analog şi cu celelalte două restricții – vezi figurile 2.4 şi 2.5

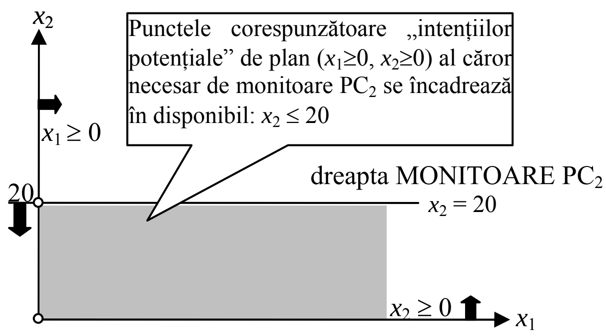


Figura 2.4

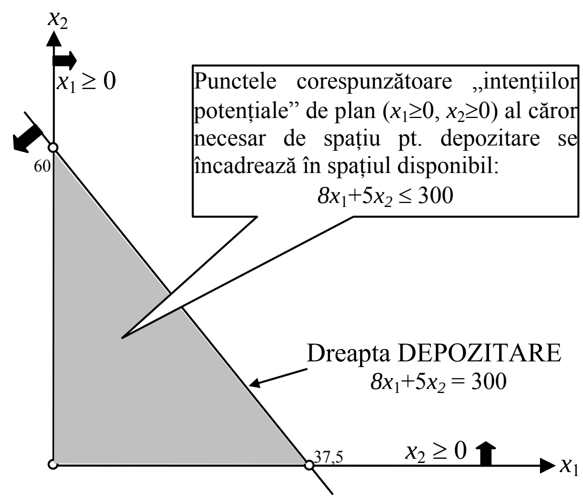


Figura 2.5

Recapitulând, în figurile 2.1, 2.3, 2.4 şi 2.5 apar mulțimile de puncte (x_1, x_2) ale căror coordonate satisfac – separat! – condițiile de nenegativitate şi restricțiile programului (P$_1$). Partea lor comună, adică **intersecția**, este formată din punctele care satisfac **simultan** toate aceste condiții.

În figura 2.6 este vizualizată această intersecție; ea este mulțimea hasurată OABCD. Punctele ei sunt exact soluțiile admisibile ale programului (P$_1$) şi corespund propunerilor de plan, realizabile din resursele date.

II) În continuare răspundem la a doua întrebare.

Dând funcției obiectiv f o valoare oarecare, de exemplu 1300, ne putem întreba ce semnificație au punctele (x_1, x_2) - fireşte cu $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ - situate pe dreapta:

$$f = 1300 \quad \Leftrightarrow \quad 50x_1 + 40x_2 = 1300$$

Natural, aceste puncte corespund „intențiilor de plan” care ar aduce firmei un profit de \$1300 – fireşte în cazul în care această intenție ar fi şi realizabilă.
Pentru a vedea dacă firma poate realiza un profit de \$1300 din resursele date, cercetăm dacă dreapta “f = 1300” intersectează mulțimea $\mathcal{A}$ a programelor de producție realizabile. Din figura 2.7 rezultă că există chiar o infinitate de programe realizabile care ar conduce la acest profit. Se poate obține un profit dublu? Din aceeaşi figură rezultă că dreapta $f = 2600 = 50x_1 + 40x_2$ nu mai intersectează $\mathcal{A}$ şi în consecință \$2600 nu pot fi câştigați din resursele date!
Pentru a vedea cât de mare este profitul ce poate fi realizat, translatăm dreapta f = 1300 către dreapta f = 2600 oprindu-ne în momentul în care “se pierde” intersecția cu mulțimea soluțiilor admisibile $\mathcal{A}$.

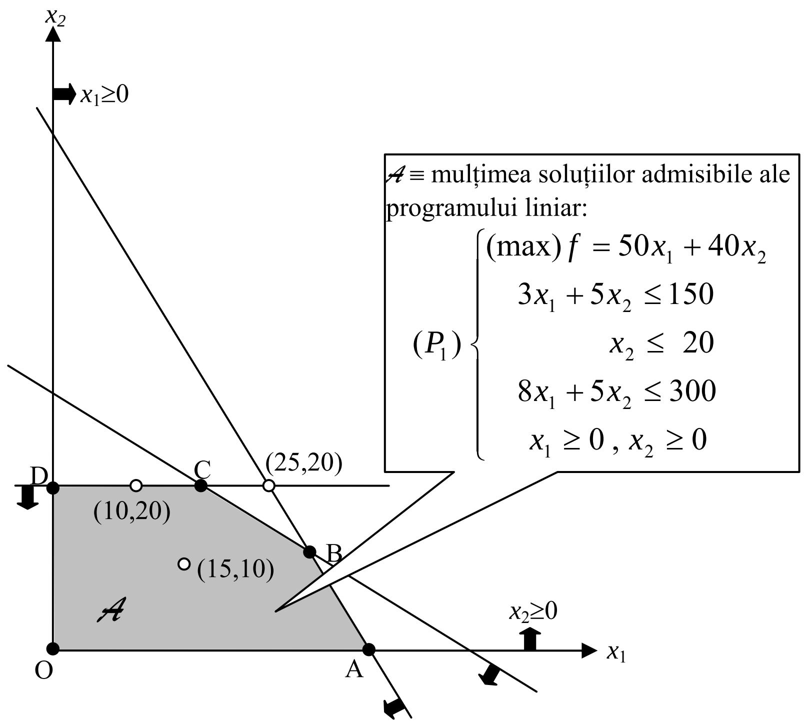


Figura 2.6

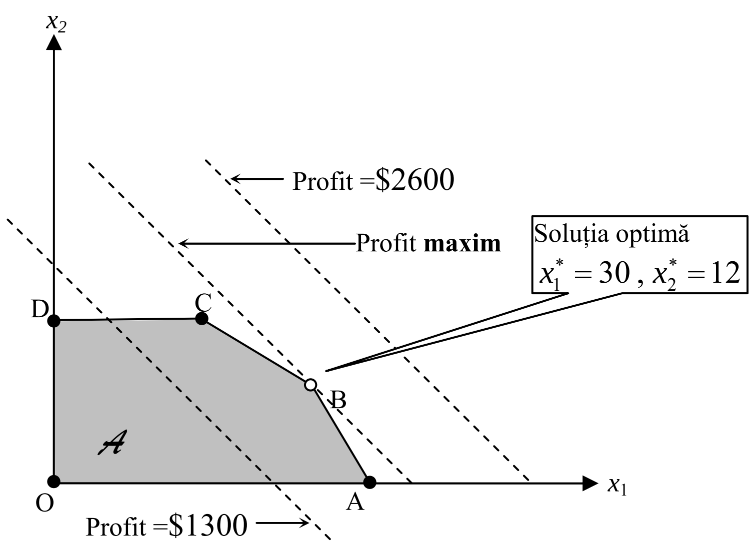


Figura 2.7

Din figura 2.7 rezultă că dreapta “profit maxim” trece prin punctual B, punct ce reprezintă soluția optimă a problemei.
Programul realizabil reprezentat de punctual B, program care ar aduce firmei cel mai mare profit posibil, se află la intersecția dreptelor “asamblare” şi “spațiu de depozitare”; prin urmare acest plan necesită consumarea integrală a resurselor sus amintite.
Componentele programului optim ≡ coordonatele punctului B se obțin rezolvând sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 150 \\ 8x_1 + 5x_2 = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^* = 30 \text{ unitati PC}_1 \\ x_2^* = 12 \text{ unitati PC}_2 \end{array} \Rightarrow \text{profitul maxim } f^* = \$1980$$

2.3 Concluzii generale rezultate din rezolvarea grafică a programelor liniare în două variabile

În rezolvarea modelului firmei de calculatoare am insistat mai mult asupra semnificațiilor economice ale reprezentărilor geometrice utilizate. Vom încerca acum să punem în evidență o serie de proprietăți, valabile pentru orice program liniar; aceste proprietăți vor juca un rol decisiv în elaborarea unor metode de rezolvare a programelor liniare. Astfel, vom răspunde şi la întrebarea III) formulată în secțiunea 2.2.
Pentru variație, să considerăm un alt program liniar în două variabile:

$$(P_2)\begin{cases} (\max) f = 3x_1 - x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

În figura 2.8 este vizualizată mulțimea soluțiilor admisibile $\mathcal{A}$: este mulțimea haşurată ABCD. Ecuația de definiție a funcției obiectiv:

$$3x_1 - x_2 = f$$

poate fi interpretată ca ecuația unei mulțimi de drepte paralele, (denumirea consacrată: fascicul de drepte paralele) numite **drepte de nivel** ale funcției *f*. Dacă o dreaptă particulară

$$3x_1 - x_2 = \bar{f} \qquad \text{(în figură } \bar{f} = 1\text{)}$$

intersectează $\mathcal{A}$ aceasta va însemna că programul (P_2) are soluții admisibile care oferă funcției obiectiv valoarea prestabilită $\bar{f}$. Pentru valori numerice superioare lui $\bar{f}$ dreptele de nivel corespunzătoare sunt **translații** ale dreptei originale în sensul indicat de săgeată. Rezultă uşor că maximul funcției *f* se atinge în „vârful” (colțul) A al frontierei mulțimii $\mathcal{A}$. A este intersecția dreptelor de ecuații $3x_1 - 2x_2 = 3$

şi $2x_1 + x_2 = 5$. Rezolvând sistemul acestor ecuații se găseşte soluția optimă $x^* = \left(\frac{13}{7}, \frac{9}{7}\right)$ cu $\max f = f(x^*) = \frac{30}{7}$, care satisface cu egalitate prima şi a treia restricție şi cu inegalitate strictă pe cea de a doua.

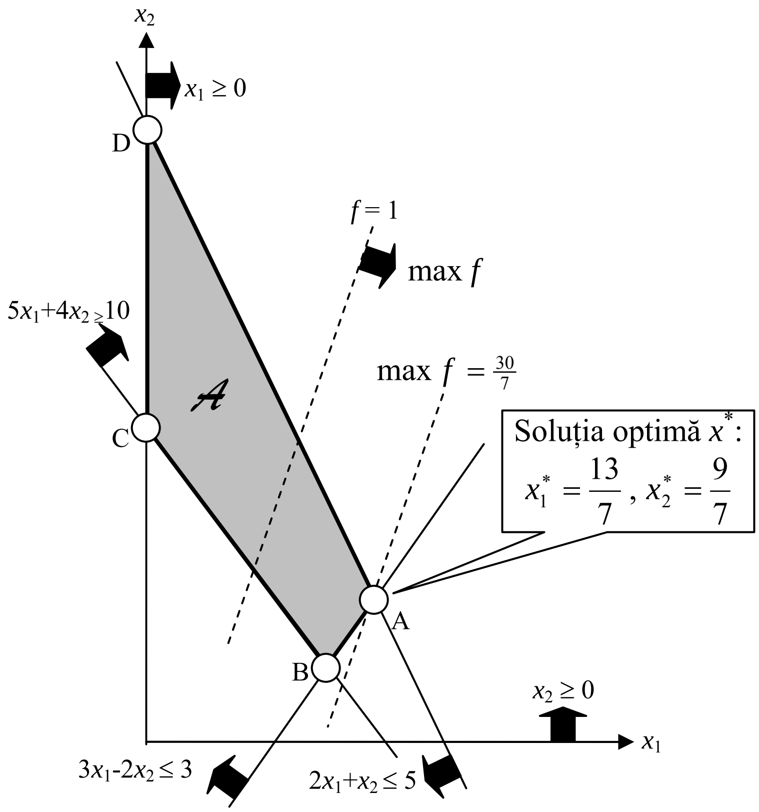


Figura 2.8

Dacă în (P_2) schimbăm funcția obiectiv $f = 3x_1 - x_2$ cu funcția $g = x_1 - x_2$ obținem un nou program liniar, (P_3) a cărui soluție optimă se găseşte în alt vârf al mulțimii $\mathcal{A}$ şi anume în B de coordonatele $x_1 = \frac{16}{11}$, $x_2 = \frac{15}{22}$ - vezi figura 2.9.

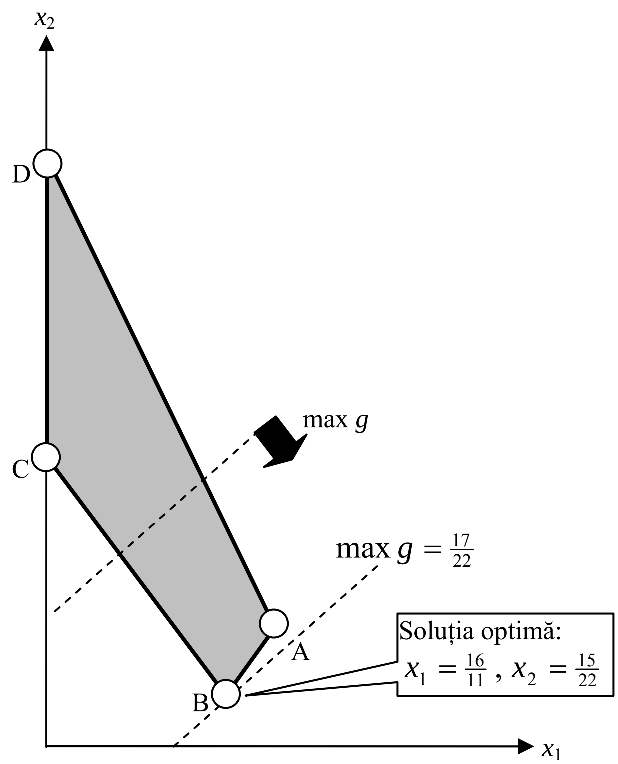


Figura 2.9

În fiecare din cele trei „rezolvări grafice” de programe liniare în două variabile de până acum, optimul funcțiilor obiectiv a fost realizat de către o singură soluție admisibilă. Nu întotdeauna este aşa; să considerăm programul liniar (P_4) derivat din (P_2) prin înlocuirea funcției obiectiv f cu funcția $h = 10x_1 + 5x_2$.Din figura 2.10 rezultă că nu numai vârfurile $A\left(\frac{13}{7},\frac{9}{7}\right)$ şi $D(0,5)$ sunt soluții optime dar şi toate celelalte puncte ale segmentului AD au această calitate! Prin urmare programul (P_4) are o infinitate de soluții optime!

Vom analiza acum programul liniar:

$$(P_5)\begin{cases}(\max) f = 3x_1 - x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

derivat din (P_2) prin eliminarea celei de a treia restricții. Mulțimea soluțiilor admisibile ale noului program este **nemărginită** – vezi figura 2.11 – şi orice dreaptă de nivel a funcției obiectiv $3x_1 - x_2 = \bar{f}$

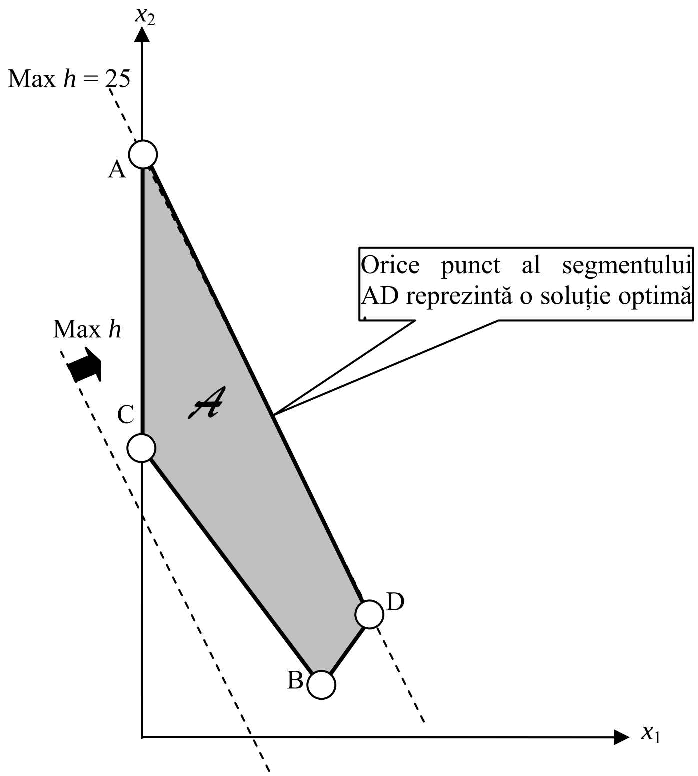


Figura 2.10

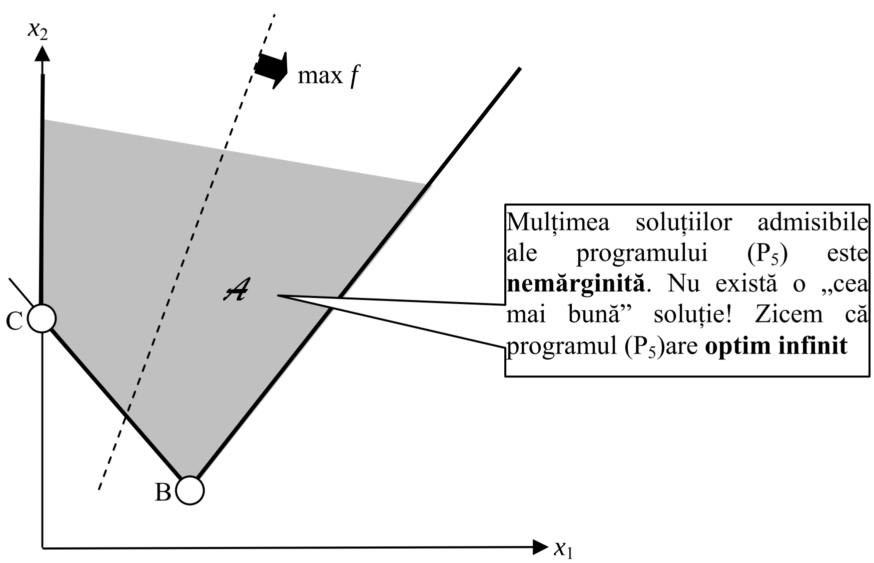


Figura 2.11

o va intersecta, oricât de mare ar fi constanta $\bar{f}$ .Conchidem că deşi (P_5) are soluții admisibile, nu există una care să ofere funcției obiectiv cea mai mare valoare. Vom spune că funcția obiectiv a programului (P_5) este **nemărginită superior** pe mulțimea soluțiilor sale admisibile sau că (P_5) are **optim infinit**.

Să luăm în considerare şi programul liniar:

$$(P_6)\begin{cases}(\max) f = 3x_1 - x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \geq 3 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{cases}$$

dedus din (P_2) schimbând sensurile tuturor restricțiilor. În figura 2.12 sunt puse în evidență cele cinci

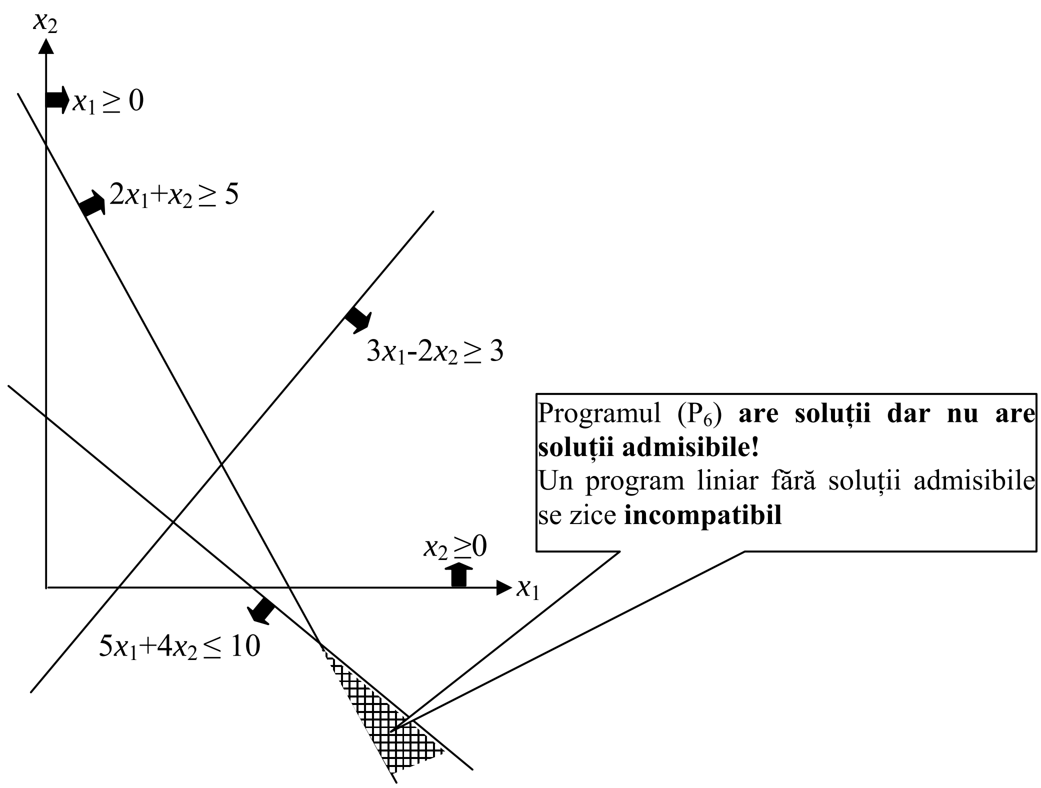


Figura 2.12

semiplane în care sunt verificate restricțiile şi condițiile de nenegativitate. Mulțimea haşurată este formată din punctele ale căror coordonate verifică toate restricțiile programului; aceste puncte reprezintă **soluțiile** programului. Nici una dintre aceste soluții nu verifică simultan ambele condiții de nenegativitate, altfel spus nu este admisibilă. Programul (P_6) **nu are soluții admisibile**; zicem că (P_6) este un **program incompatibil**.

Exemplele studiate mai sus ilustrează următoarea clasificare a programelor liniare după existența soluțiilor admisibile.

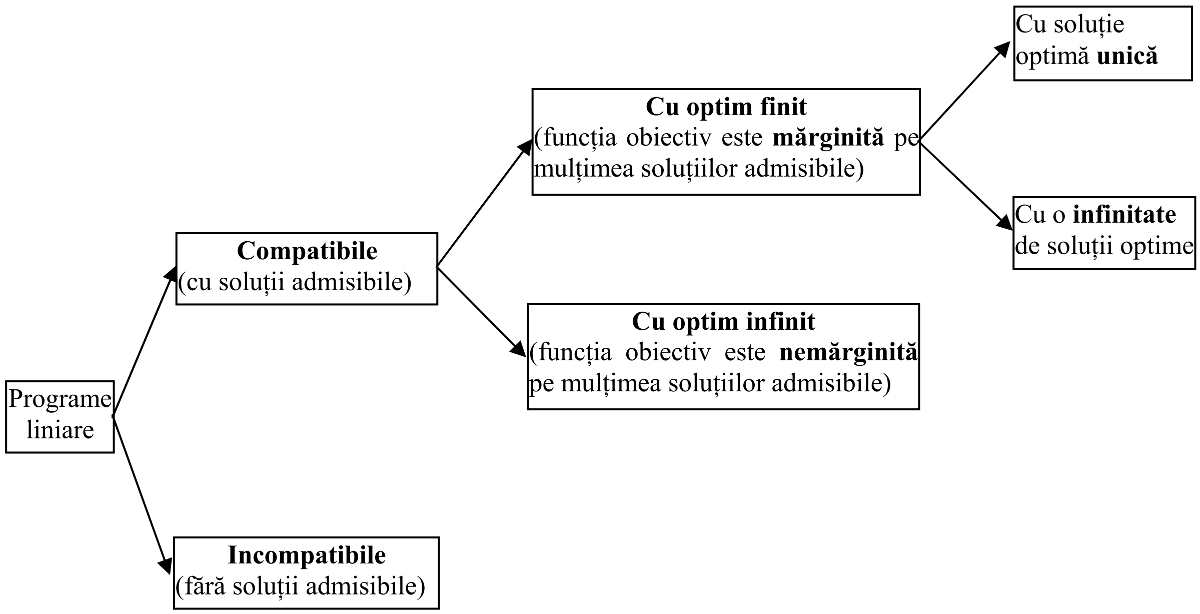


Figura 2.13

Observație importantă: Existența unei soluții optime în cazul în care funcția obiectiv este mărginită pe mulțimea soluțiilor admisibile $\mathcal{A}$ este consecința faptului că $\mathcal{A}$ este o mulțime **închisă** în topologia uzuală a spațiului numeric R^n (≡își conține frontiera). Faptul că $\mathcal{A}$ este închisă rezultă din cerința ca toate restricțiile inegalități să fie **nestricte**!!

De exemplu, funcția $f(x) = 3x$ este mărginită superior pe mulțimea $\mathcal{A} = \{x \mid 0 \le x < 1\}$ - care nu este închisă - însă $\max\{f(x), x \in \mathcal{A}\}$ nu există: singurul candidat ar fi $x^* = 1$ dar $1 \notin \mathcal{A}$!

Următoarele concluzii sunt valabile pentru orice program liniar compatibil în două sau trei variabile – mulțimea soluțiilor admisibile $\mathcal{A}$ putând fi „vizualizată” în „planul” R^2 sau „spațiul fizic” R^3:

- **Mulțimea $\mathcal{A}$ este convexă, adică cu două puncte conține şi segmentul care uneşte punctele. O consecință intuitivă a acestei proprietăți este că soluția optimă, dacă există, se găseşte „undeva” pe frontiera lui $\mathcal{A}$.**
- **Frontiera mulțimii $\mathcal{A}$ are un număr finit de vârfuri şi dacă programul are soluții optime cel puțin una dintre ele se găseşte într-un vârf.**

Aceste afirmații constituie sursa întregii teorii a programării liniare deoarece sunt valabile pentru orice program liniar, bineînțeles cu condiția generalizării corespunzătoare a termenilor geometrici utilizați în formulare.

2.4 Forme speciale de prezentare a unui program liniar

Într-un program liniar se pot întâlni restricții de toate tipurile, egalități şi inegalități, acestea din urmă putând fi de sensuri contrare. Studiul teoretic a impus forme speciale de prezentare, mai simple, în care toate restricțiile au „aceeaşi formă”:

- **forma canonică**, în care toate restricțiile sunt inegalități cu acelaşi sens;
- **forma standard**, în care toate restricțiile sunt egalități.

Orice program liniar poate fi adus la una din aceste forme fără „alterarea” mulțimii soluțiilor admisibile şi nici a soluțiilor sale optime!

1) Forma canonică a unei probleme de programare liniară

O restricție a unui program liniar (P) se zice **concordantă** dacă este o **inegalitate** de tipul "≤" când funcția obiectiv se **maximizează** şi de tipul "≥" când funcția obiectiv se **minimizează**. O restricție **inegalitate** care nu este concordantă se va numi **neconcordantă**. Restricțiile egalități nu fac obiectul acestei clasificări.

Spunem că o problemă de programare liniară este în **formă canonică** dacă toate restricțiile ei sunt **inegalități concordante**.

În consecință, o problemă în **formă canonică de maximizare** arată astfel:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad i = 1,\ldots,m \\ x_j \ge 0 \quad j = 1,\ldots,n \\ (\max) f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \end{cases} \quad \text{sau matricial} \quad \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \quad \text{unde:}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

O problemă în **formă canonică de minimizare** se va scrie:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \\ x_j \ge 0 \\ (\min) f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Ax \ge b \\ x \ge 0 \\ (\min) f = cx \end{cases}$$

Orice problemă de programare liniară se poate pune sub o formă canonică de maximizare sau minimizare, **fără modificarea mulțimii soluțiilor admisibile**, observând că:

- **o egalitate se poate înlocui cu două inegalități de sens contrar;**
- **o restricție neconcordantă devine concordantă prin înmulțire cu -1;**
- **putem schimba sensul optimizării funcției obiectiv, grație formulei generale:**

$$\min_{x \in \mathcal{A}} f(x) = -\max_{x \in \mathcal{A}} \left[-f(x) \right] \qquad (1)$$

În consecință, putem face anumite raționamente teoretice pe o formă canonică, ca de exemplu în **teoria dualității liniare**, fără ca prin aceasta să restrângem generalitatea.

Exemplul 2.1 de aducere a unui program liniar la o formă canonică:

$$\begin{cases} (\max) f = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 \ge 5 \\ 2x_1 + x_3 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (\min)(-f) = -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 \ge 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \ge -3 \\ 3x_1 + x_2 \ge 5 \\ -2x_1 - x_3 \ge -10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Programul (P) — Forma canonică de minimizare a programului (P)

2) Forma standard a unei probleme de programare liniară

Spunem că o problemă de programare liniară este în **formă standard** dacă toate restricțiile ei sunt **egalități**. Importanța acestei forme particulare rezultă din faptul că metoda de rezolvare a problemelor de programare liniară care va fi expusă mai departe cere ca problema să fie în această prezentare.

În consecință, o problemă (P) care are şi restricții inegalități va fi înlocuită - în vederea rezolvării ei - cu o alta în care toate restricțiile sunt egalități.

Noua problemă, numită **forma standard a problemei** (P) şi notată (**FSP**), se construieşte astfel:

- **O restricție inegalitate din problema originală (P) de tipul "≤" (respectiv de tipul "≥") se transformă în egalitate prin adăugarea (respectiv prin scăderea) unei variabile nenegative din membrul său stâng.**
- **Restricțiile inegalități nu se modifică.**
- **Noile variabile introduse nu apar în funcția obiectiv a problemei originale (alternativ, spunem că ele apar cu coeficienți nuli)**

Variabilele introduse în restricțiile inegalități în scopul transformării acestora în egalități poartă numele de **variabile de abatere**.

Exemplul 2.2 de aducere a unui program liniar la forma standard.

$$(P)\begin{cases}(\max) f = 7x_1 + 9x_2 + 8x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\end{cases} \Longrightarrow (FSP)\begin{cases}(\max) f = 7x_1 + 9x_2 + 8x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 9 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,5\end{cases}$$

Problema care apare în acest context este aceea de a explica modul în care se obține soluția optimă a problemei (P) dacă se cunoaşte soluția optimă a formei sale standard (FSP).
Se poate arăta uşor că între mulțimile de soluții admisibile $\mathcal{A}_P$,ale problemei (P) şi $\mathcal{A}_{FSP}$, ale problemei (FSP), există o **corespondență bijectivă care conservă soluțiile optime**. Vom arăta cum funcționează această corespondență pe exemplul precedent.

Notând-o cu Φ, aceasta va asocia unei soluții admisibile $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ a problemei (P) vectorul:

$$\Phi(\overline{x}) = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, 5\overline{x}_1 + 2\overline{x}_2 - \overline{x}_3 - 4, 9 - \overline{x}_1 - 2\overline{x}_2 - 3\overline{x}_3)$$

care prin construcție se dovedeşte a fi o soluție admisibilă a problemei (FSP). Reciproc, unei soluții admisibile $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4, \widetilde{x}_5)$ a problemei (FSP) corespondența inversă Φ^{-1} îi asociază vectorul $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)$ care satisface restricțiile problemei originale (P) deoarece $\widetilde{x}_4 \geq 0, \widetilde{x}_5 \geq 0$.Dacă $\overline{x}$ este soluția optimă a problemei (P) atunci $\Phi(\overline{x})$ este soluția optimă a problemei (FSP) şi reciproc, dacă cunoaştem soluția optimă $\widetilde{x}$ a problemei (FSP) , $\Phi^{-1}(\widetilde{x})$ reprezintă soluția optimă a problemei (P).

În problemele concrete, variabilele de abatere au interpretări economice precise ca de exemplu cantități de resurse neutilizate sau depăşiri ale unor indicatori economici aşa că în analiza soluției optime valorile lor vor fi luate în considerare laolaltă cu valorile variabilelor originale.

Exemplul 2.3 Reluăm modelul problemei firmei de calculatoare (rezolvat grafic în secțiunea 2.2) împreună cu forma sa standard:

$$(P)\begin{cases} 3x_1+5x_2\le 150\\ \qquad\ x_2\le\ 20\\ 8x_1+5x_2\le 300\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\\ (\max) f=50x_1+40x_2\end{cases} \Rightarrow (FSP)\begin{cases} 3x_1+5x_2+x_3 \qquad\qquad =150\\ \qquad\ x_2 \qquad +x_4 \qquad = \ 20\\ 8x_1+5x_2 \qquad\qquad +x_5=300\\ x_j\ge 0 \quad j=1,\cdots,5\\ (\max) f=50x_1+40x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5\end{cases}$$

Conținutul economic al variabilelor de abatere x_3, x_4, x_5 derivă nemijlocit din semnificațiile restricțiilor în care sunt introduse. Astfel:

$$x_3 = \underbrace{150}_{\substack{\text{Fondul de timp}\\ \textbf{disponibil}\\ \text{pentru asamblare}}} - \underbrace{(3x_1+5x_2)}_{\substack{\textbf{Necesarul}\text{ de timp pentru}\\ \text{asamblarea cantităților } x_1,\, x_2\\ \text{de produse finite}}} \equiv \text{Fondul de timp pentru asamblare } \textbf{neutilizat}$$

Analog:

$$x_4 = 20 - x_2 \equiv \text{monitoare PC}_2\ \textbf{rămase în stoc}$$

$$x_5 = 300-(8x_1+5x_2) \equiv \text{spațiul de depozitare } \textbf{nefolosit}$$

Știind că:

$$x_1^* = 30 \quad x_2^* = 12 \quad x_3^* = 0 \quad x_4^* = 8 \quad x_5^* = 0 \quad (\max) f = 1980$$

este soluția optimă a formei standard, cuplul $x_1^* = 30 \quad x_2^* = 12$ reprezintă soluția optimă a programului original (P) iar 1980 este valoarea maximă a funcției obiectiv. În termeni economici , programul optim de activitate al firmei pentru următoarea săptămână ar consta în asamblarea a 30 unități PC_1 şi a 12 unități PC_2 cu un profit maxim de \$1980. În plus $x_3^* = 0$ şi $x_5^* = 0$ arată că acest program ar utiliza integral fondul de timp pentru asamblare şi spațiul de depozitare în timp ce $x_4^* = 8$ arată că în stoc ar mai rămâne 8 monitoare PC_2 ce ar putea fi folosite în altă perioadă de planificare.

Probleme propuse

1. Să se reprezinte grafic mulțimea soluțiilor admisibile ale programului liniar:

$$(P_1)\begin{cases} (\max) f = 2x_1 + x_2\\ x_1 + x_2 \le 5\\ -x_1 + x_2 \le 0\\ 6x_1 + 2x_2 \le 21\\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

a) să se determine grafic soluția optimă a programului (P_1);
b) care va fi soluția optimă dacă funcția obiectiv se schimbă în $(\max) g = x_1 + 2x_2$

2. Să se reprezinte grafic mulțimea soluțiilor admisibile ale programului liniar:

$$(P_2)\begin{cases}(\min) f = 5x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{cases}$$

a) să se determine grafic soluția optimă a programului (P_2);
b) care va fi soluția optimă dacă funcția obiectiv se schimbă în $(\min) g = 3x_1 + 6x_2$

3. Să se reprezinte grafic mulțimea soluțiilor admisibile ale programului liniar:

$$(P_3)\begin{cases}(\max) f = x_1 + x_2 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{cases}$$

a) să se determine grafic soluția optimă a programului (P_3);
b) care va fi soluția optimă dacă funcția obiectiv se schimbă în $(\max) g = -x_1 + x_2$

4. Determinați pe cale grafică soluțiile optime ale programelor liniare rezultate din modelarea problemelor 1 și 2 din secțiunea „Probleme propuse" a unității de învățare 1. Interpretați economic soluțiile găsite.

5. Rezolvați pe cale grafică programul liniar:

$$\begin{cases}(\max) f = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ -x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ 2x_3 - x_4 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0\end{cases}$$

Unitatea de învățare 3

ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ

Teoria metodei simplex

Cuprins

3.1 Baze şi soluții de bază ale unui program liniar în formă standard
3.2 Importanța conceptului de soluție admisibilă de bază
3.3 Metoda simplex. Descriere de principiu
3.4 Fundamentele metodei simplex
Anexa: Pivotarea gaussiană

3.1 Baze şi soluții de bază ale unui program liniar în formă standard

Considerăm un program liniar (P) în formă standard cu *m* restricţii şi *n* variabile şi în care funcția obiectiv se maximizează:

$$(P)\begin{cases}(\max) f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n\\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ a_{m11}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\max) f = \sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j\\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1,\cdots,m\\ x_j \ge 0 \quad j = 1,\cdots,n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\max) f = cx\\ Ax = b\\ x \ge 0\end{cases} \qquad (1)$$

cu notațiile matriciale:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{bmatrix}$$

A se va numi **matricea tehnologică** a programului (P); coloanele ei vor fi notate cu A^1, A^2,..., A^n. *b* este vectorul **termenilor liberi** iar *c* este vectorul coeficienților funcției obiectiv sau vectorul **costurilor**.
Fie:

$$\mathcal{A} = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \ge 0\}$$

mulțimea soluțiilor admisibile ale programului (P). A rezolva programul (P) înseamnă a determina $x^* \in \mathcal{A}$ cu proprietatea:

$$f(x^*) = \max\{f(x), x \in \mathcal{A}\}$$

Va fi util să reformulăm programul (P) în următorii termeni. Fiind dat sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} Ax \quad = b\\ -cx + f = 0\end{cases} \qquad (2)$$

în $n + 1$ variabile $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ şi *f* să se determine soluția (x^*, f^*) în care

$x^* \ge 0$ şi f^* este **maxim**.

În continuare vom presupune în mod constant că:

$$\text{Rang A} = m < n \tag{3}$$

Definiție Se numeşte **bază** a programului (P) orice submatrice patrată **inversabilă** de ordinul *m*, extrasă din matricea tehnologică A.

Grație ipotezei (3), (P) are cel puțin o bază şi numărul acestora este finit, nedepăşind $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Fixăm o bază B. Notăm cu I mulțimea indicilor coloanelor din B astfel că $B = \left[A^i\right]_{i \in I}$. Fie J mulțimea indicilor coloanelor matricii A care nu sunt în B; aceste coloane formează submatricea $S = \left[A^j\right]_{j \in J}$. Evident, $|I| = m$ şi $|J| = n - m$. Pentru matricea tehnologică A a rezultat partiționarea: $A = [B, S]$.

Baza fixată induce şi partiționările:

$$x = \begin{bmatrix} x^B \\ x^S \end{bmatrix} \text{ cu } x^B = \begin{bmatrix} \vdots \\ x_i \\ \vdots \end{bmatrix}_{i \in I} \quad x^S = \begin{bmatrix} \vdots \\ x_j \\ \vdots \end{bmatrix}_{j \in J}$$

$$c = \begin{bmatrix} c^B & c^S \end{bmatrix} \text{ cu } c^B = \begin{bmatrix} \cdots & c_i & \cdots \end{bmatrix}_{i \in I} \quad c^S = \begin{bmatrix} \cdots & c_j & \cdots \end{bmatrix}_{j \in J}$$

Coloanele $A^i, i \in I$ care formează baza B şi variabilele $x_i, i \in I$ care formează vectorul x^B se vor numi **coloane bazice** respectiv **variabile bazice**. Coloanele $A^j, j \in J$ şi variabilele $x_j, j \in J$ se vor zice **nebazice**. Deoarece matricea B este inversabilă sistemul:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad Bx^B + Sx^S = b$$

poate fi rezolvat în raport cu x^B:

$$x^B + \overline{S}x^S = \overline{b} \quad \text{cu } \overline{S} = B^{-1}S \text{ şi } \overline{b} = B^{-1}b$$

ceeace va permite eliminarea variabilelor bazice din expresia funcției obiectiv:

$$f = cx = c^B x^B + c^S x^S = c^B(\overline{b} - \overline{S}x^S) + c^S x^S = \overline{f} - \overline{c}x^S$$

unde:

$$\overline{f} = c^B\overline{b} = c^B B^{-1}b \text{ şi } \overline{c} = c^B\overline{S} - c^S = c^B B^{-1}S - c^S.$$

Astfel, sistemul (2) este adus la forma echivalentă:

$$\begin{cases} x^B + \bar{S}x^S = \bar{b} \\ f + \bar{c}x^S = \bar{f} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_i + \sum_{j\in J}\bar{a}_{ij}x_j = \bar{b}_i & i \in I \\ f + \sum_{j\in J}\bar{c}_j x_j = \bar{f} \end{cases} \tag{4}$$

în care:

$$\bar{S} = \left[\bar{a}_{ij}\right]_{i\in I,\, j\in J} \quad , \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \bar{b}_i \\ \vdots \end{bmatrix}_{i\in I} \quad , \quad \bar{c} = \left[\cdots \quad \bar{c}_j \quad \cdots\right]_{j\in J}$$

Din definițiile matriciale $\bar{f} = c^B\bar{b}$ şi $\bar{c} = c^B\bar{S} - c^S$ rezultă relațiile:

$$\bar{f} = \sum_{i\in I} c_i\bar{b}_i \tag{5}$$

$$\bar{c}_j = \sum_{i\in I} c_i\bar{a}_{ij} - c_j \quad j \in J \tag{6}$$

Valorile $\bar{c}_j$, $j \in J$ se numesc **costuri reduse**.
Sistemul (4) se numeşte **forma explicită** a programului (P) – rescris în formatul (2) – în raport cu baza (fixată) B.
Luând în (4) $x^S = 0 \Leftrightarrow x_j = 0 \quad j \in J$ obținem următoarea soluție a sistemului original de restricții $Ax = b$:

$$x(B) = \begin{bmatrix} x^B = \bar{b} \\ x^S = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_i = \bar{b}_i \text{ , } i \in I \text{ ; } x_j = 0 \text{ , } j \in J \tag{7}$$

$x(B)$ se numeşte **soluția asociată bazei** B. Valoarea funcției obiectiv în soluția $x(B)$ este $f(x(B)) = \bar{f}$.
Soluția $x(B)$ se zice **nedegenerată** dacă toate valorile $\bar{b}_i$, $i \in I$ ale variabilelor bazice sunt nenule. Dacă unele componente $\bar{b}_i$ sunt nule vom spune că $x(B)$ este o soluție **degenerată**.
În continuare, o soluție $\bar{x}$ a programului (P) se va numi **soluție de bază** dacă $\bar{x}$ este asociată unei baze a programului.Criteriul de recunoaştere a soluțiilor de bază este simplu:

Soluția $\bar{x} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$ a programului în formă standard (P) este o soluție de bază dacă şi numai dacă coloanele A^j, corespunzătoare componentelor $\bar{x}_j$ **nenule**, sunt **liniar independente**.

Într-adevăr, dacă este aşa, atunci $\bar{x}$ nu poate avea mai mult de *m* componente nenule, *m* fiind numărul restricțiilor din (P).Dacă numărul acestor componente este exact *m*, coloanele corespunzătoare

formează o bază B a programului (P) şi $\bar{x} = x(B)$.Dacă numărul componentelor nenule este < m, coloanele corespunzătoare pot fi completate până la o bază **în mai multe moduri** astfel că $\bar{x}$ **va fi asociată la mai multe baze!!**
Prin urmare, este posibil ca două baze diferite B şi B' să aibă o aceeaşi soluție asociată $\bar{x} = x(B) = x(B')$ şi dacă este aşa, atunci soluția comună asociată $\bar{x}$ este degenerată.
Din cele discutate rezultă că **numărul soluțiilor de bază ale programului (P) este finit** nedepăşind numărul bazelor.
Baza B şi soluția asociată $x(B)$ se vor numi **admisibile** dacă valorile variabilelor bazice din soluție sunt **nenegative**: $\bar{b}_i \geq 0$, $i \in I$. Deoarece numărul bazelor programului (P) este finit, urmează că **programul (P) are un număr finit de baze şi soluții de bază admisibile**.
Pentru comoditatea calculelor ulterioare este util să înscriem constantele formei explicite (4) într-un tabel cu formatul:

			.... c_i	.... c_j ....
CB	VB	VVB	...... $x_i, i \in I$	...... $x_j, j \in J$ ......
⋮	⋮	⋮	⋮ 0 ⋮	⋮
c_i	x_i	$\bar{b}_i$	..... 1	...... $\bar{a}_{ij}$ .....
⋮	⋮	⋮	⋮ 0 ⋮	⋮
	f	$\bar{f}$	...... *	...... $\bar{c}_j$ ......

Tabelul 3.1

numit **tabelul simplex** asociat bazei B.

De reținut:

- un tabel simplex conține constantele formei explicite a unui program liniar în formă standard în raport cu o anumită bază;
- baza se recunoaşte prin variabilele bazice asociate , listate în coloana VB;
- tabelul pune în evidență soluția de bază asociată bazei considerate: valorile variabilelor bazice sunt listate în coloana VVB; prin definiție, variabilele nebazice – cele care nu apar în coloana VB – au valoarea zero;
- conform relației (5), valoarea funcției obiectiv în soluția de bază afişată în tabel este produsul scalar al coloanelor CB şi VVB;
- costurile reduse sunt valori numerice asociate variabilelor nebazice; conform relației (6) un cost redus $\bar{c}_j$ se obține efectuând produsul scalar al coloanelor CB şi „x_j" din care se scade costul c_j scris deasupra tabelului simplex. Am putea extinde definiția (6) a costurilor reduse şi la variabilele bazice, dar rezultatul este întotdeauna acelaşi: $\bar{c}_i = c_i - c_i = 0$. În tabelul simplex, „costurile reduse" corespunzătoare variabilelor bazice sunt reprezentate prin*.

3.2 Importanța conceptului de soluție admisibilă de bază

Se demonstrează următoarele rezultate:

Teorema 1 Dacă programul în formă standard (P) este compatibil (adică are soluții admisibile) atunci are şi soluții admisibile de bază.

Teorema 2 (**teorema centrală a programării liniare**) Dacă programul în formă standard (P) are soluții optime, cel puțin una dintre ele este o soluție admisibilă de bază.

Importanța acestei teoreme este covârşitoare: în baza ei, problema determinării unei soluții optime a programului – în formă standard – (P) din mulțimea **infinită** a tuturor soluțiilor admisibile s-a redus la căutarea acesteia în mulțimea **finită** a soluțiilor **admisibile de bază**!
Ar rezulta următorul procedeu naiv de rezolvare a programului (P):

- se generează toate bazele programului (P);
- pentru fiecare bază generată se calculează soluția de bază asociată;
- se elimină soluțiile de bază neadmisibile;
- dintre cele rămase se reține aceea care maximizează valoarea funcției obiectiv.

Este clar că procedura descrisă este finită dar are serioase neajunsuri:

- din start trebuie luate în considerare toate cele C_n^m submatrici patrate de ordinul m care pot fi extrase din matricea tehnologică A. Testarea inversabilității unei asemenea submatrici B precum şi calculul soluției $x(B)$ asociate – în caz că B este inversabilă – pot fi făcute simultan. Numai că, numărul C_n^m poate fi **excesiv de mare**, chiar şi pentru valori moderate ale lui m şi n. De exemplu, pentru un program liniar în formă standard cu 10 restricții şi 20 variabile, $C_{20}^{10} = 184756$ şi prin urmare vom avea de cercetat 184756 matrici patrate de ordinul 10!!
- se poate întâmpla ca după terminarea acestor calcule să nu găsim nici o bază admisibilă, lucru posibil dacă (P) este un program **incompatibil**;
- presupunând că am găsit şi baze admisibile şi că am identificat soluția de bază care maximizează funcția obiectiv, **nu suntem siguri** că aceasta ar fi şi soluția optimă căutată deoarece s-ar putea ca programul (P) să aibe **optim infinit**.

Indiferent de situație,un mare volum de calcule şi implicit un timp apreciabil este irosit cu generarea soluțiilor neadmisibile de bază care pot fi extrem de numeroase. Această abordare naivă are o alternativă care, din fericire, s-a dovedit a fi deosebit de eficientă în rezolvarea programelor liniare. Este vorba de **metoda simplex** elaborată de matematicianul american GEORGE B. DANTZIG în 1947.

3.3 Metoda simplex. Descriere de principiu

În esență, **metoda simplex este un procedeu de cercetare sistematică a bazelor admisibile ale unui program liniar în formă standard şi a soluțiilor asociate acestor baze**. Ea presupune cunoaşterea unei soluții admisibile de bază zisă **de start** şi în continuare construieşte un şir de soluții admisibile de bază, dealungul cărora valoarea funcției obiectiv creşte **progresiv**.
Metoda oferă un test simplu de recunoaştere a **optimalității** unei soluții admisibile de bază şi deasemeni un test simplu de recunoaştere a **optimului infinit**.
Cu unele precauții, uşor de îndeplinit, metoda simplex garantează **convergența** procesului iterativ în sensul că o bază admisibilă cercetată la un moment dat nu mai revine în etapele ulterioare. Cum numărul bazelor admisibile este finit urmează că într-un număr **finit** de paşi se ajunge fie la o soluție optimă fie la concluzia că programul are optim infinit.
În această succintă descriere, am plecat de la ipoteza cunoaşterii unei soluții admisibile de bază, adică de la premiza că programul de rezolvat este compatibil. Metoda simplex este capabilă să recunoască **incompatibilitatea** unui program liniar.
Practica numerică a arătat că numărul soluțiilor de bază efectiv generate de metodă este de regulă **mult mai mic** decât numărul total al acestora!

3.4 Fundamentele metodei simplex

În această secțiune vom presupune că baza B, fixată în secțiunea precedentă, este admisibilă ceeace, în notațiile introduse, înseamnă $\overline{b}_i \geq 0$, $i \in I$.
Pentru uşurarea înțelegerii rezultatelor ce vor urma vom considera şi tabelul simplex T_B (tabelul 3.2) asociat bazei B, tabel în care au fost puşi în evidență:

- doi indici "bazici": unul **generic** *i* şi un altul **particular** $r \quad (i, r \in I)$
- doi indici „nebazici": unul **generic** *j* şi un altul **particular** $k \quad (j, k \in J)$

Teorema I Dacă $\overline{c}_j \geq 0$, $j \in J$ soluția de bază $x(B)$ asociată bazei B şi presupusă admisibilă este optimă. Dacă în plus $\overline{c}_j > 0$, $j \in J$ atunci $x(B)$ este unica soluție optimă a programului (P).

Demonstrație. Fie $\overline{x}$ o soluție admisibilă oarecare a programului (P). Folosind expresia funcției obiectiv din forma explicită (4) obținem:

$$f(\overline{x}) = \overline{f} - \sum_{j \in J} \overline{c}_j \overline{x}_j \leq \overline{f} = f(x(B))$$

Prin urmare soluția admisibilă $x(B)$ dă funcției obiectiv cea mai mare valoare. Dacă toate costurile reduse sunt pozitive şi $\bar{x} \neq x(B)$ atunci $\sum_{j\in J} \bar{c}_j \bar{x}_j > 0$ de unde rezultă că $f(\bar{x}) < f(x(B))$ şi în consecință $x(B)$ este unica soluție optimă a programului (P).

			…	c_i	…	c_r	…	…	c_j	…	c_k	…
CB	VB	VVB	…	x_i	…	x_r	…	…	x_j	…	x_k	…
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮			⋮		⋮	
c_i	x_i	$\bar{b}_i$	…	1	…	0	…	…	$\bar{a}_{ij}$	…	$\bar{a}_{ik}$	…
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮			⋮		⋮	
c_r	x_r	$\bar{b}_r$	…	0	…	1	…	…	$\bar{a}_{rj}$	…	$\bar{a}_{rk}$	…
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮			⋮		⋮	
	f	$\bar{f}$	…	*	…	*	…	…	$\bar{c}_j$	…	$\bar{c}_k$	…

T_B

Zona variabilelor bazice — Zona variabilelor nebazice

Tabelul 3.2

Interpretare în tabelul simplex T_B:

- admisibilitatea soluției $x(B)$ ≡ toate valorile numerice din coloana VVB sunt ≥ 0;
- optimalitatea soluției $x(B)$ ≡ toate costurile reduse $\bar{c}_j$ asociate variabilelor nebazice x_j, $j \in J$ şi listate în ultima linie a tabelului T_B sunt ≥ 0.

Teorema II Dacă există un indice nebazic $k \in J$ astfel încât:

$$\bar{c}_k < 0 \text{ şi } \bar{a}_{ik} \leq 0 \text{ pentru toți } i \in I \tag{8}$$

atunci programul (P) are optim infinit.

Demonstrație. Dacă în forma explicită (4) luăm $x_k = \theta \geq 0$ şi $x_j = 0$ pentru $j \in J$, $j \neq k$ obținem soluția variabilă $x(\theta)$ cu componentele:

$$x(\theta) \equiv \begin{cases} x_i = \bar{b}_i - \theta \cdot \bar{a}_{ik} & , i \in I \\ x_k = \theta & \\ x_j = 0, \ j \in J, \ j \neq k & \end{cases} \qquad f(x(\theta)) = \bar{f} - \theta \cdot \bar{c}_k \tag{9}$$

Ipoteza teroremei asigură admisibilitatea soluției $x(\theta)$ pentru orice $\theta \geq 0$. Deoarece:

$$\lim_{\theta \to \infty} f(x(\theta)) = +\infty$$

funcția obiectiv este nemărginită superior pe mulțimea soluțiilor admisibile ale programului (P) de unde concluzia teoremei.

Interpretare în tabelul simplex $\mathbf{T_B}$: dacă există un cost redus negativ $(\overline{c}_k < 0)$ şi toate componentele coloanei „x_j" de „deasupra" sunt nepozitive ($\overline{a}_{ik} \leq 0$, $i \in I$) programul (P) are optim infinit.
Următoarea teoremă explică ce se întâmplă dacă ipotezele teoremelor I şi II nu sunt îndeplinite.

Teorema III Presupunem că există indicele nebazic $k \in J$ astfel încât:

$$\overline{c}_k < 0 \text{ şi pentru unii indici } i \in I \text{ avem } \overline{a}_{ik} > 0$$

Fie $r \in I$ un indice bazic cu proprietatea:

$$\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rk}} = \min\left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{ik}} \,\middle|\, i \in I \quad \text{cu } \overline{a}_{ik} > 0 \right\} \tag{10}$$

şi fie B' matricea rezultată din B înlocuind coloana A^r cu coloana A^k. Atunci B' este o bază admisibilă a programului (P) şi soluția asociată $x(B')$ este cel puțin la fel de bună ca şi soluția $x(B)$ în sensul că: $f(x(B')) \geq f(x(B))$.

Demonstrație. Deoarece:

$$\det B = \overline{a}_{rk} \cdot \det B' \neq 0$$

urmează că B' este o matrice inversabilă, deci o bază a programului (P). Apoi, soluția variabilă (9), construită în demonstrația teoremei II, este admisibilă numai pentru $0 \leq \theta \leq \theta_0$ unde $\theta_0 = \dfrac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rk}}$ este minimul din relația (10). Se arată uşor că soluția asociată bazei „noi" B' este chiar $x(\theta_0)$. Deoarece:

$$f(x(\theta_0)) = \overline{f} - \theta_0 \cdot \overline{c}_k \quad \Leftrightarrow \quad f(x(B')) = f(x(B)) - \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rk}} \cdot \overline{c}_k \tag{11}$$

rezultă $f(x(B')) \geq f(x(B))$.

Interpretare în tabelul simplex $\mathbf{T_B}$. Teorema III afirmă că dacă există un cost redus **negativ** $(\overline{c}_k < 0)$ şi unele componente ale coloanei "x_k" de "deasupra" sunt **pozitive** ($\overline{a}_{ik} > 0$ pentru unii indici i)

există o bază admisibilă B' a cărei soluție asociată este la fel de bună ca şi soluția „curentă” $x(B)$ dacă nu chiar mai bună. Noua bază B' se obține introducând coloana A^k în baza „veche” B în locul unei coloane A^r al cărei indice se obține raportând componentele coloanei VVB la componentele corespunzătoare şi **pozitive** ale coloanei „x_k” $\left(\bar{b}_i / \bar{a}_{ik} \text{ dacă } \bar{a}_{ik} > 0\right)$ şi luând **minimul** acestor rapoarte.

Comentarii pe marginea teoremelor fundamentale

1) Bazele B şi B' din enunțul teoremei III diferă printr-o singură coloană. Două baze cu această proprietate se vor numi **vecine** şi la fel se vor numi şi soluțiile de bază asociate. Teoremele demonstrate arată că dacă o soluție de bază $\bar{x}$ nu satisface criteriul de optimalitate atunci sau programul (P) are optim infinit sau printre soluțiile de bază vecine cu $\bar{x}$ se găseşte una la fel de bună dacă nu chiar mai bună decât $\bar{x}$.

2) În principiu, toate considerațiile teoretice făcute asupra bazei admisibile B vor fi reluate pe noua bază admisibilă B'. Pentru aceasta avem nevoie de forma explicită a programului (P) în raport cu noua bază B':

$$\begin{cases} x_i + \sum\limits_{j \in J'} \bar{a}'_{ij} x_j = \bar{b}'_i & i \in I' \\ f + \sum\limits_{j \in J'} \bar{c}'_j x_j = \bar{f}' \end{cases} \tag{12}$$

unde

$$I' = I \setminus \{r\} \cup \{k\} \qquad J' = J \setminus \{k\} \cup \{r\}$$

Echivalent, avem nevoie de tabelul simplex $T_{B'}$ asociat bazei noi B'. Se poate arăta că setul de constante numerice $\left\{\bar{a}'_{ij}, \bar{b}'_i, \bar{c}'_j, \bar{f}'\right\}$ rezultă din **pivotarea gaussiană cu pivotul** $\bar{a}_{rk}$ a setului de constante $\left\{\bar{a}_{ij}, \bar{b}_i, \bar{c}_j, \bar{f}\right\}$ din forma explicită în raport cu baza „veche” B – vezi anexa.

Anexă Pivotarea gaussiană

Se consideră un **tabel dreptunghiular** T de numere în care a fost selectat (pus în evidență) un element **nenul** p numit **pivot**.
Pivotarea gaussiană a tabeluluiT cu pivotul *p* înseamnă transformarea tabelului T într-un nou tabel T’ de aceleaşi dimensiuni după următoarele reguli:

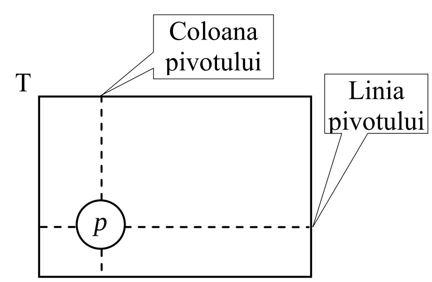


Figura 3.1

1) Coloana pivotului din T devine coloană unitară în T’.

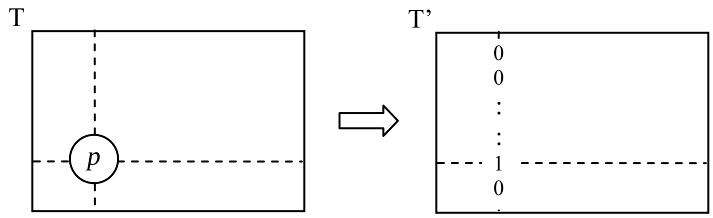


Figura 3.2

2) Elementele din T de pe linia pivotului se împart la pivot şi rezultatele se trec în pozițiile corespunzătoare din T'.

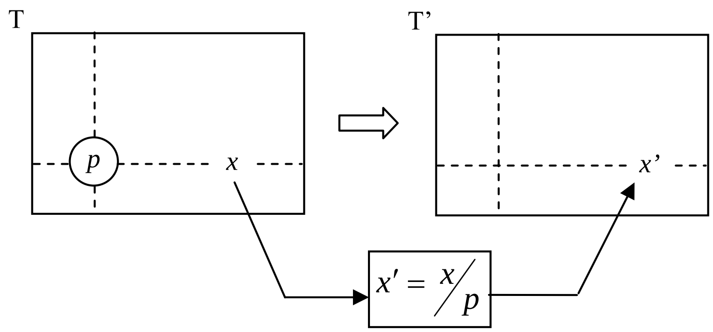


Figura 3.3

3) Celelalte elemente din T, nesituate pe linia sau coloana pivotului, se transformă după regula ilustrată în diagrama din figura 3.4 şi numită **regula dreptunghiului**. **Rezultatele se trec în pozițiile corespunzătoare din T'.**

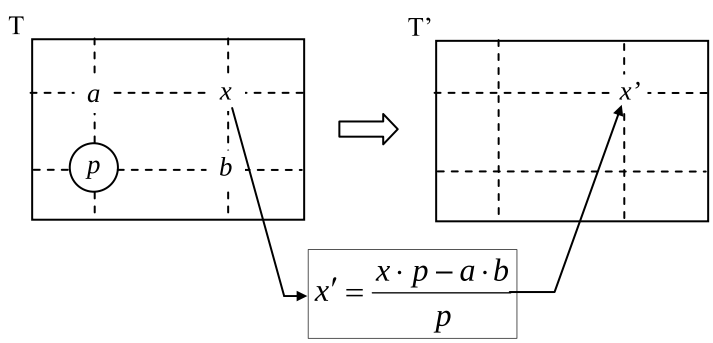


Figura 3.4

Exemplu de calcul

$$\begin{array}{|ccccc|}\hline 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & \boxed{3} & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ \hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|ccccc|}\hline 7/3 & 0 & -2/3 & 2 & 4/3 \\ -5/3 & 0 & 1/3 & 1 & 10/3 \\ -1/3 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ -2 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ \hline\end{array}$$

Figura 3.5

Pivotarea gaussiană este folosită în algoritmul simplex la trecerea de la tabelul asociat unei baze neoptimale la tabelul asociat unei baze vecine mai bune.

			…..	…..	c_k	…..
CB	VB	VVB	…..	…..	x_k	…..
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_r	x_r	$\bar{b}_r$	…..	…..	$\boxed{\bar{a}_{rk}}$	…..
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	f	$\bar{f}$	…..	…..	$\bar{c}_k$	…..

Tabelul 3.6

În notațiile introduse pivotul $p = \bar{a}_{rk}$ se află la intersecția coloanei variabilei nebazice x_k care va deveni variabilă bazică cu linia variabilei bazice x_r care va deveni nebazică. În calculul manual, pivotarea se aplică valorilor numerice din zona cu marginile îngroşate. Deşi calculul valorii funcției obiectiv în noua soluție de bază precum şi calculul noilor costuri reduse se pot face deasemeni prin pivotare, recomandăm evaluarea acestor mărimi după formulele de definiție (5) şi (6) din secțiunea 3.1.

Unitatea de învățare 4

ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ
Algoritmul simplex

Cuprins

4.1 Algoritmul simplex
4.2 Determinarea unei baze admisibile de start. Recunoaşterea incompatibilității unui program liniar
4.3 Citirea inversei bazei curente din tabelul simplex asociat
4.4 Ilustrări numerice

Probleme propuse

4.1 Algoritmul simplex

(Este bine ca cititorul să aibe în față notațiile, relațiile si considerațiile teoretice dezvoltate în unitatea de învățare 3!)

Algoritmul simplex este procedeul efectiv de rezolvare a programelor liniare în formă standard bazat pe considerațiile teoretice dezvoltate în secțiunea precedentă. Instrucțiunile algoritmului presupun cunoscută o bază admisibilă B şi forma explicită (4) a programului de rezolvat în raport cu această bază (echivalent, tabelul simplex T_B)

Pasul 1 (test de optimalitate) Dacă toate costurile reduse sunt nenegative, adică $\overline{c}_j \geq 0$, $j \in J$ soluția de bază $x(B)$ asociată bazei B este **optimă**; STOP. În caz contrar se execută:

Pasul 2 (criteriul de intrare în bază) Se alege indicele nebazic $k \in J$ cu relația:

$$\overline{c}_k = \min\{\overline{c}_j \ , \ j \in J\} < 0 \qquad (*)$$

Coloana A^k va intra în baza curentă.

Pasul 3 (criteriul de recunoaştere a optimului infinit) Dacă toate componentele $\overline{a}_{ik}$, $i \in I$ sunt ≤ 0 programul de rezolvat are **optim infinit**; STOP. În caz contrar se trece la:

Pasul 4 (criteriul de ieşire din bază) Se determină indicele bazic $r \in I$ cu relația

$$\frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rk}} = \min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{ik}} \middle| \ i \in I \quad \text{cu} \ \ \overline{a}_{ik} > 0\right\} \qquad (**)$$

Coloana A^r părăseşte baza curentă.

Pasul 5 (pivotare) Se determină forma explicită a programului de rezolvat în raport cu noua bază

$$B' \equiv B \setminus \{A^r\} \cup \{A^k\}$$

prin **pivotarea gaussiană cu pivotul** $\overline{a}_{rk} > 0$ a formei explicite în raport cu baza curentă B.

Se revine la pasul 1 în cadrul unei noi iterații.

Observații şi explicații referitoare la conținutul unei iterații a algoritmului simplex

- Pasul 1 este justificat prin teorema I.

- Dacă s-a trecut la pasul 2, costul $\bar{c}_k$ din relaţia (*) este cel mai mic cost redus **negativ**. Formula (11) arată că orice cost redus negativ poate conduce la o bază admisibilă cel puţin la fel de bună ca şi B dacă nu chiar mai bună. Alegerea coloanei A^k care va intra în baza curentă după relaţia (*) asigură **cea mai mare viteză de creştere** a valorii funcţiei obiectiv şi are drept consecinţă – de regulă – terminarea algoritmului în mai puţine iteraţii.

- Pasul 3 este justificat de teorema II.

- **Atenţie**: **Alegerea coloanei A^r care părăseşte baza curentă după relaţia (**) asigură admisibilitatea soluţiei $x(B')$ asociată bazei noi $B' \equiv B \setminus \{A^r\} \cup \{A^k\}$.**

- Dacă minimul din formulele (*) şi (**) nu este unic se va alege **primul** indice *k* respectiv *r* care realizează acest minim (**regula lui Bland**). Aplicarea acestei reguli are drept consecinţă evitarea **ciclării** algoritmului simplex şi terminarea lui într-un număr **finit** de iteraţii (ciclarea înseamnă reapariţia unei baze care a mai fost cercetată într-o etapă anterioară).

- În descrierea algoritmului simplex am presupus că funcţia obiectiv se maximizează. Algoritmul este aplicabil şi problemelor de minimizare cu următoarele mici modificări:

- la pasul 1, soluţia de bază curentă este optimă dacă $\bar{c}_j \le 0$, $j \in J$;
- la pasul 2, coloana A^k care intră în bază se determină cu relaţia $\bar{c}_k = \max\{\bar{c}_j \, , \, j \in J\}$.

4.2 Determinarea unei baze admisibile de start. Recunoaşterea incompatibilităţii unui program liniar

În secţiunea precedentă am presupus că programul liniar în formă standard (P) este compatibil şi mai mult am presupus cunoscută o bază admisibilă a acestuia împreună cu tabelul simplex asociat. A rămas de răspuns la întrebarea: **Cum se recunoaşte compatibilitatea unui program liniar?**

Vom spune că programul liniar în formă standard

$$(P)\begin{cases}(\max) f = cx \\ Ax = b \\ x \ge 0\end{cases}$$

este în **formă bună** dacă:

- termenii liberi ai restricţiilor sunt **nenegativi** ($\Leftrightarrow b \ge 0$)
- matricea tehnologică A conţine o submatrice **unitate** E de ordinul $m \equiv$ numărul restricţiilor din (P), ceeace revine la a spune că **în sistemul $Ax = b$ fiecare ecuaţie conţine o variabilă cu coeficientul plus unu care nu mai apare în celelalte ecuaţii**. Dacă este aşa, atunci E este o

bază a programului (P) – numită **baza unitară** – şi este chiar o bază admisibilă pentru că soluţia de bază asociată are toate componentele nenegative:

$$x(E) = \begin{bmatrix} x^E = E^{-1}b = b \geq 0 \\ x^S = 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ valorile variabilelor bazice} \\ \leftarrow \text{valorile variabilelor nebazice} \end{array}$$

În mod evident, forma explicită a sistemului de restricţii $Ax = b$ în raport cu baza unitară E coincide cu sistemul $Ax = b$ astfel că tabelul simplex asociat se completează imediat.

CB	VB	VVB	
		b	A

Notă: valoarea funcţiei obiectiv în soluţia asociată bazei unitare precum şi costurile reduse se calculează cu formulele (5) şi (6) din secţiunea 3.1

Figura 4.1

În concluzie, un program liniar în formă bună este întotdeauna compatibil şi putem aplica algoritmul simplex luând baza unitară drept bază admisibilă de start!

Dacă programul în formă standard (P) nu este în formă bună, el va fi înlocuit – în vederea rezolvării – cu un altul în această formă:

- eventualele restricţii cu termen liber negativ se înmulţesc cu -1;
- dacă matricea tehnologică nu conţine toate coloanele matricii unitare, în anumite restricţii se vor introduce noi variabile **nenegative** pentru a creea coloanele unitare care lipsesc. Noile variabile, numite **variabile artificiale** se introduc şi în funcţia obiectiv cu un coeficient comun şi foarte mare în valoare absolută. Coeficientul va fi:

- **negativ**, dacă funcţia obiectiv **se maximizează**;
- **pozitiv**, dacă funcţia obiectiv **se minimizează**.

Exemplul 4.1 Programul liniar în formă standard:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 150 \\ x_2 + x_4 = 20 \\ 8x_1 + 5x_2 + x_5 = 300 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 5 \\ (\max) f = 50x_1 + 40x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\qquad A^1 \; A^2 \; A^3 \; A^4 \; A^5$$

este în formă bună având baza unitară admisibilă $E = \begin{bmatrix} A^3 & A^4 & A^5 \end{bmatrix}$. Tabelul simplex asociat acestei baze arată astfel:

			50	40	0	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	150	3	5	1	0	0
0	x_4	20	0	1	0	]	0
0	x_5	300	8	5	0	0	1
	f	0	-50	-40	*	*	*

Tabelul 4.1

În schimb, forma standard a programului (P) din exemplul 2.3, secțiunea 2.1 a unității de învățare 2:

$$(FSP)\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 30 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 35 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,\cdots,5 \\ (\max) f = 8x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 & A^5 \end{matrix} \end{array}$$

nu este în formă bună, matricea tehnologică A conținând doar coloana $A^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ din matricea unitate E.

Pentru aducerea la forma bună:

- introducem variabilele artificiale x_6 şi x_7 în primele două ecuații;
- introducem x_6 şi x_7 şi în funcția obiectiv cu coeficientul comun –M unde M este o constantă pozitivă foarte mare.

Rezultă programul:

$$(FBP)\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_6 = 30 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 35 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,\cdots,7 \\ (\max) f = 8x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 - Mx_6 - Mx_7 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 & A^5 & A^6 & A^7 \end{matrix} \end{array}$$

a cărui rezolvare cu algoritmul simplex poate începe imediat de la baza unitară admisibilă $E = \begin{bmatrix} A^6 & A^7 & A^5 \end{bmatrix}$. Tabelul simplex asociat:

			8	-6	7	0	0	-M	-M
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-M	x_6	30	3	-1	2	0	0	1	0
-M	x_7	35	2	1	0	-1	0	0	1
0	x_5	20	1	0	3	0	1	0	0
	f	-65M	-5M-8	6	-2M-7	M	*	*	*

Tabelul 4.2

Revenind la cazul general, este evident că dacă programul (P) este **compatibil** atunci soluțiile sale admisibile se identifică cu acele soluții ale formei sale bune (FBP) în care toate variabilele artificiale au valoarea **zero**! Deoarece variabilele artificiale sunt însoțite în expresia funcției obiectiv de nişte **"penalități" foarte mari**, algoritmul simplex este instruit să caute tocmai aceste soluții!!
Ca urmare, aplicând algoritmul simplex formei bune (FBP), sunt posibile numai două rezultate:

- La o anumită iterație se găseşte o bază cu proprietetea că toate variabilele artificiale au valoarea **zero** în soluția de bază asociată. Ignorând valorile nule ale acestor variabile obținem o soluție de bază admisibilă a programului în formă standard (P) şi concluzia că (P) este **compatibil.** Este posibil ca soluția găsită să nu satisfacă criteriul de optimalitate. Continuând aplicarea algoritmului simplex se ajunge, după cum se ştie déjà, fie la o soluție optimă a programului (P) fie la recunoaşterea faptului că (P) are optim infinit.
- S-a ajuns la soluția optimă a programului (FBP) şi în această soluție cel puțin o variabilă artificială are valoare **nenulă.** În acest caz, programul (P) este **incompatibil**.

Procedura de inițializare a algoritmului simplex descrisă mai sus şi caracterizată prin aceea că variabilele artificiale "amendează" funcția obiectiv cu coeficienți de penalizare foarte mari este cunoscută sub numele **de metoda penalizării**.

Pentru determinarea unei soluții admisibile de bază de start, în situația în care programul inițial (P) nu este în formă bună, se poate aplica şi aşa numita **metodă a celor două faze**:

- se introduc variabile artificiale în retricții, bineînțeles acolo unde este cazul, în scopul formării unei baze unitare de start (termenii liberi ai restricțiilor se presupun nenegativi)

- **în faza I se minimizează suma *w* a variabilelor artificiale introduse.** Deoarece şi aceste variabile sunt supuse condiției de nenegativitate urmează că (min) $w \geq 0$. **În caz că (min) $w > 0$ programul inițial (P) este incompatibil**. Dacă (min) $w = 0$ aceasta înseamnă că s-a găsit o soluție în care toate variabilele artificiale introduse au valoarea zero Ignorând aceste valori nule rezultă o soluție admisibilă de bază pentru problema în formă standard (P).

Se poate trece la:

- faza a II-a, în care se optimizează funcția obiectiv a programului (P) plecând de la soluția de bază rezultată la finele fazei I. Atenție: la începutul acestei faze vom avea grijă să recalculăm costurile reduse în raport cu coeficienții funcției obiectiv din (P)!!

4.3 Citirea inversei bazei curente din tabelul simplex asociat

După cum am văzut, rezolvarea cu algoritmul simplex a unui program liniar în formă standard (P) înseamnă generarea şi cercetarea unor baze admisibile ale acestui program. Există situații în care, din considerente teoretice sau practice , este necesar să cunoaştem inversa B^{-1} a unei baze cercetate de algoritm. Dacă programul (P) este în formă bună şi baza de start este matricea unitate E, inversa unei baze cercetate de algoritm se citeşte din tabelul simplex asociat! Într-adevăr, matricea tehnologică a programului (P) are forma:

$$A = \begin{bmatrix} A' & E \end{bmatrix}$$

şi apare în tabelul simplex inițial (T_E) – vezi figura 4.2
Fie acum B o bază cercetată de algoritmul simplex. Matricea tehnologică a formei explicite a programului (P) în raport cu baza B are forma:

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} B^{-1}A' & , & B^{-1}E \equiv B^{-1} \end{bmatrix}$$

şi va apare în tabelul simplex (T_B) asociat bazei B

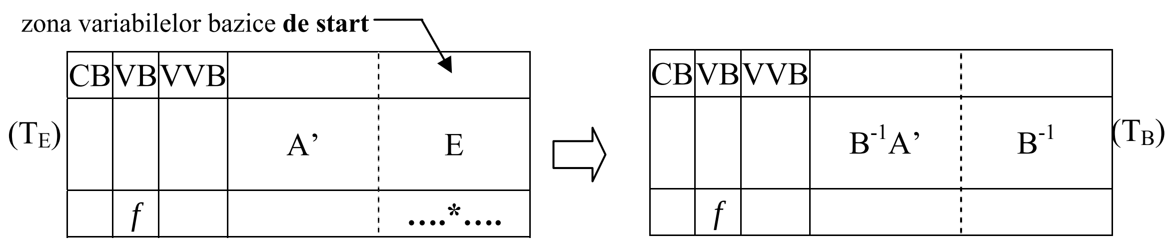


Figura 4.2

Comparând tabelele (T_E) şi (T_B) rezultă concluzia:

La fiecare iterație, algoritmul simplex pune în evidență inversa B^{-1} a bazei curente B. Ea este formată din coloanele $\overline{A}^j \equiv B^{-1}A^j$ din tabelul simplex asociat,corespunzătoare coloanelor A^j care au format baza unitară de start!

4.4 Exemple de aplicare a algoritmului simplex

Exemplul 4.2 Reluăm problema firmei de calculatoare (P) introdusă în unitatea de învăţare 1 secţiunea 1.1, exemplul 1.2. Problema a fost rezolvată grafic în unitatea de învăţare 2, secţiunea 2.2 În aceeaşi unitate, dar în secţiunea 2.4, exemplul 2.3, s-a construit forma standard şi s-a discutat semnificaţia economică a variabilelor de abatere. În actuala unitate de învăţare, secţiunea 4.2, s-a constatat că forma standard (FSP) permite aplicarea nemijlocită a algoritmului simplex şi s-a construit tabelul simplex asociat bazei de start (tabelul 4.1). Mai jos se dau şi celelalte tabele simplex care conduc la soluţia optimă – vezi tabelele 4.3 – 4.5. Trecerea de la un tabel la altul s-a făcut pe baza explicaţiilor date în anexa unităţii de învăţare3 (pivotarea gaussiană).

În trei iteraţii s-a obţinut soluţia optimă a programului original (P):

$$x_1^* = 30 \quad x_2^* = 12 \quad (\max) f = 1980$$

Valorile variabilelor de abatere: $x_3^* = 0 \quad x_4^* = 8 \quad x_5^* = 0$

Interpretarea soluţiei a fost déjà dată în unitatea de învăţare 2, secţiunea 2.2.

			50	40	0	0	0	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	150	3	5	1	0	0	150:3 = 50
0	x_4	20	0	1	0	1	0	—
0	x_5	300	$\boxed{8}$	5	0	0	1	300:8 = 37,5
	f	0	-50	-40	*	*	*	
0	x_3	75/2	0	$\boxed{25/8}$	1	0	-3/8	75/2 : 25/8 = 12
0	x_4	20	0	1	0	1	0	20 : 1 = 20
50	x_1	75/2	1	5/8	0	0	1/8	75/2 : 5/8 = 60
	f	1875	*	-35/4	*	*	25/4	
40	x_2	12	0	1	8/25	0	-3/25	
0	x_4	8	0	0	-8/25	1	3/25	
5	x_1	30	1	0	-1/5	0	1/5	
	f	1980	*	*	14/5	*	26/5	

ITERAŢIA 1
Baza: $B^1 = \left[A^3, A^4, A^5\right]$.
Soluţia asociată: $x(B^1) = (0{,}0{,}150{,}20{,}300)$, f=0
$\bar{c}_1 < 0, \bar{c}_2 < 0 \rightarrow$ criteriul de optim nu este verificat.
În bază intră A^1 şi iese A^5.

ITERAŢIA 1
Baza: $B^2 = \left[A^3, A^4, A^1\right]$. Soluţia asociată:
$x(B^2) = (75/2, 0, 75/2, 20, 0)$, f=1875
$\bar{c}_2 < 0 \rightarrow$ criteriul de optim nu este verificat.
În bază intră A^2 şi iese A^3.

ITERAŢIA 3
Baza: $B^3 = \left[A^2, A^4, A^1\right]$. Soluţia asociată:
$x(B^3) = (30, 12, 0, 8, 0)$, f=1980
Criteriul de optim este verificat $\rightarrow$ soluţia curentă este optimă.

Tabelele 4.3 – 4.5

Exemplul 4.3 (interpretarea geometrică a algoritmului simplex). Recapitulăm rezolvarea programului (FSP) din exemplul 4.2, listând bazele generate de algoritm, soluţiile de bază asociate şi "proiecţiile" acestor soluţii în spaţiul (de fapt planul) variabilelor de decizie originale x_1 şi x_2 – vezi tabelul 4.6

Proiecțiile au fost apoi evidențiate în mulțimea soluțiilor admisibile $\mathcal{A}_P$ ale programului original (P) – vezi figura 4.3 Se observă că soluțiile cercetate corespund unora dintre "vârfurile" mulțimii $\mathcal{A}_P$. procedura a plecat din vârful O apoi s-a deplasat către vârful "mai bun" A şi s-a oprit în vârful "optim"B.

Baza B	Soluția x(B) asociată	Proiecția în planul (x_1,x_2)	Valoarea funcției obiectiv
$B^1 \equiv \left[A^3, A^4, A^5\right]$	$x(B^1) = (0,0,150,20,300)$	O ≡ (0,0)	0
$B^2 \equiv \left[A^3, A^4, A^1\right]$	$x(B^2) = (\frac{75}{2},0,\frac{75}{2},20,0)$	A≡ (37.5,0)	1875
$B^3 \equiv \left[A^2, A^4, A^1\right]$	$x(B^3) = (30,12,0,8,0)$	B≡ (30,12)	1980

Tabelul 4.6

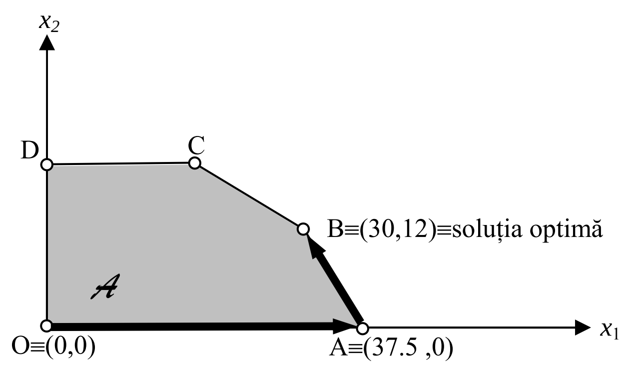


Figura 4.3

Exemplul 4.4 Vom determina soluția optimă a programului liniar (P) dat în unitatea de învățare 2, secțiunea 2.1, exemplul 2.3. În secțiunea 4.2 a acestei unități de învățare am constatat că forma standard (FSP) nu conține baza unitară de start, drept care s-a trecut la forma bună (FBP) şi s-a construit tabelul simplex de start (tabelul 4.2). Rezolvarea (FBP) este dată în tabelele 4.7 – 4.9

În soluția optimă, variabilele x_6 şi x_7 au valoarea zero; urmează că programul inițial (P) are soluția optimă:

$$x_1^* = 13 \quad x_2^* = 9 \quad x_3^* = 0 \qquad (\max) f = 50$$

Valorile variabilelor de abatere: $x_4^* = 0 \quad x_5^* = 7$

.

			8	-6	7	0	0	-M	-M	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-M	x_6	30	$\boxed{3}$	-1	2	0	0	1	0	30:3=**10**
-M	x_7	35	2	1	0	-1	0	0	1	35:2=17.5
0	x_5	20	1	0	3	0	1	0	0	20:1=20
	f	-65M	-5M-8	6	-2M-7	M	*	*	*	
8	x_1	10	1	-1/3	2/3	0	0	1/3	0	-
-M	x_7	15	0	$\boxed{5/3}$	-4/3	-1	0	-2/3	1	15:5/3=**9**
0	x_5	10	0	1/3	7/3	0	1	-1/3	0	10:1/3=30
	f	-15M+80	*	-5M/3+10/3	4M/3-5/3	M	*	5M/3+8/3	*	
8	x_1	13	1	0	2/5	-1/5	0	1/5	1/5	
-6	x_2	9	0	1	-4/5	-3/5	0	-2/5	3/5	
0	x_5	7	0	0	13/5	1/5	1	-1/5	-1/5	
	f	50	*	*	1	2	*	M+4	M-2	

Tabelele 4.7-4.9

Cititorul atent a constatat că acesta este un exemplu de aplicare a metodei penalizării!

Exemplul 4.5 Din tabelul simplex „optim” 4.9 rezultă că inversa bazei $B=\left[A^1, A^2, A^5\right]=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ este matricea $B^{-1}=\left[\overline{A}^6, \overline{A}^7, \overline{A}^5\right]=\begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & 0 \\ -2/5 & 3/5 & 0 \\ -1/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}$. Coloanele $\overline{A}^6, \overline{A}^7, \overline{A}^5$ din tabelul simplex 4.9 corespund coloanelor unitare A^6, A^7, A^5 care au format baza unitară de start.

Exemplul 4.6 Cu ajutorul algoritmului simplex vom arăta că programul:

$$
(P)\begin{cases} (\max) f = 3x_1 + 4x_2 \\ -3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ -2x_1 + \;\; x_2 \le \;2 \\ \quad x_1 - 2x_2 \le \;2 \\ x_1 \ge 0\,,\, x_2 \ge 0 \end{cases}
$$

are optim infinit.

Forma standard şi matricea tehnologică a acesteia:

$$(FSP)\begin{cases} -3x_1+4x_2+x_3 \qquad\qquad =12 \\ -2x_1+\ \ x_2 \qquad +x_4 \qquad = \ 2 \\ \quad x_1-2x_2 \qquad\qquad +x_5 = \ 2 \\ \quad x_j \ge 0 \quad j=1,\cdots,5 \\ (\max) f \ = 3x_1+4x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A^1 \quad A^2 \ A^3 \ A^4 \ A^5$$

Plecăm cu baza unitară $E=\left[A^3\ A^4\ A^5\right]$. După trei iterații – vezi tabelele 4.10 – 4.12 - se obține soluția asociată bazei $B=\left[A^1\ A^2\ A^5\right]$ care nu verifică criteriul de optim întrucât $\bar{c}_4=-24/5<0$ dar satisface condiția criteriului de recunoaştere a optimului infinit: $\overline{A}^4=B^{-1}A^4\le 0$.

			3	4	0	0	0	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	12	-3	4	1	0	0	12:4 = 3
0	x_4	2	-2	$\boxed{1}$	0	1	0	2:1 = **2**
0	x_5	2	1	-2	0	0	1	-
	f	0	-3	-4	*	*	*	
0	x_3	4	$\boxed{5}$	0	1	-4	0	4:5 = **0.8**
4	x_2	2	-2	1	0	1	0	-
0	x_5	6	-3	0	0	2	1	-
	f	8	-11	*	*	4	*	
3	x_1	4/5	1	0	1/5	-4/5	0	
4	x_2	18/5	0	1	2/5	-3/5	0	
0	x_5	42/5	0	0	3/5	-12/5	1	
	f	84/5	*	*	11/5	-24/5	*	

Tabelele 4.10-4.12

Este instructiv să refacem demonstrația teoremei II (unitatea de învățare 3, secțiunea 3.4) pe acest exemplu. Scriem forma explicită a programului de rezolvat (FSP) în raport cu baza $B=\left[A^1\ A^2\ A^5\right]$:

$$\begin{array}{l} x_1 \quad +\tfrac{1}{5}x_3-\tfrac{4}{5}x_4 \qquad\qquad =\tfrac{4}{5} \\ \quad x_2+\tfrac{2}{5}x_3-\tfrac{3}{5}x_4 \qquad\qquad =\tfrac{18}{5} \\ \qquad\quad \tfrac{3}{5}x_3-\tfrac{2}{5}x_4+x_5 \qquad =\tfrac{42}{5} \\ \hline \qquad\quad \tfrac{11}{5}x_3-\tfrac{24}{5}x_4 \qquad +f=\tfrac{84}{5} \end{array}$$

Luând $x_3 = 0$ şi $x_4 = \theta \geq 0$ rezultă soluția variabilă $x(\theta)$ cu componentele:

$$x_1 = {}^4\!/_5 + {}^4\!/_5 \cdot \theta \text{ , } x_2 = {}^{18}\!/_5 + {}^3\!/_5 \cdot \theta \text{ , } x_3 = 0 \text{ , } x_4 = \theta \text{ , } x_5 = {}^{42}\!/_5 + {}^2\!/_5 \cdot \theta$$

evident admisibilă pentru orice θ nenegativ. Valoarea funcției obiectiv în soluția generată este $f(x(\theta)) = {}^{84}\!/_5 + {}^{24}\!/_5 \cdot \theta$. Cum $\lim\limits_{\theta \to \infty} f(x(\theta)) = +\infty$, funcția obiectiv este nemărginită superior pe mulțimea soluțiilor admisibile ale programului (FSP)

Interpretarea geometrică a raționamentelor făcute este dată în figura 4.4 Proiecțiile soluțiilor de bază cercetate de algoritm în planul variabilelor x_1 , x_2 sunt vârfurile O(0,0), A(0,2) şi B (4/5,18/5) ale mulțimii de soluții admisibile ale programului original (P)

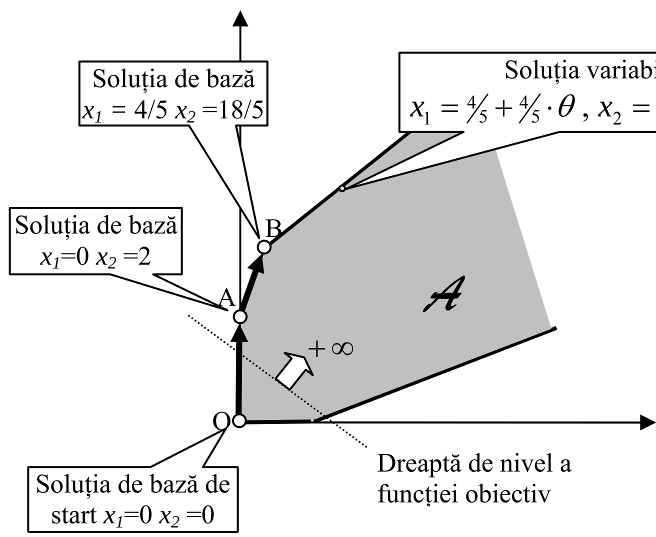


Figura 4.4

Exemplul 4.7 Vom aplica algoritmul simplex şi metoda celor două faze la rezolvarea programului liniar:

$$(P)\begin{cases} (\max) f = 2x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \geq 40 \\ \ \ x_1 + 3x_2 \geq 30 \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 \leq 30 \\ \ \ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forma standard şi matricea tehnologică a acesteia:

$$
(FSP)\begin{cases}
2x_1 + \ x_2 - x_3 \qquad\qquad = 40 \\
x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 \qquad = 30 \\
x_1 + \ x_2 \qquad\qquad + x_5 = 30 \\
\qquad x_j \geq 0 \ \ j = 1, \cdots, 5 \\
(\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5
\end{cases}
\qquad\qquad
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Pentru formarea bazei unitare de start introducem variabilele artificiale x_6 şi x_7 în primele două restricții din (FSP).

În faza I se rezolvă programul în formă bună:

$$
\begin{cases}
2x_1 + \ x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 \qquad = 40 \\
x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 \qquad\qquad + x_7 = 30 \\
x_1 + \ x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad\qquad = 30 \\
\qquad x_j \geq 0 \ \ j = 1, \cdots, 7 \\
\qquad (\min) w = x_6 + x_7
\end{cases}
\qquad
\begin{array}{c}
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\quad A^1 \ A^2 \ \ A^3 \ \ A^4 \ A^5 \ A^6 \ A^7
\end{array}
$$

plecând de la baza unitară $E = \left[A^6, A^7, A^5\right]$. Vezi tabelele 4.13 – 4.15

			0	0	0	0	0	1	1	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	40	2	1	-1	0	0	1	0	40:1=40
1	x_7	30	1	$\boxed{3}$	0	-1	0	0	1	30:3=**10**
0	x_5	30	1	1	0	0	1	0	0	30:1=30
	w	70	3	4	-1	-1	*	*	*	
1	x_6	30	$\boxed{5/3}$	0	-1	1/3	0	1	-1/3	30:5/3=**18**
0	x_2	10	1/3	1	0	-1/3	0	0	1/3	10:1/3=30
0	x_5	20	2/3	0	0	1/3	1	0	-1/3	20:2/3=30
	w	30	5/3	*	-1	1/3	*	*	-4/3	
0	x_1	18	1	0	-3/5	1/5	0	3/5	-1/5	
0	x_2	4	0	1	1/5	-2/5	0	-1/5	2/5	
0	x_5	8	0	0	2/5	1/5	1	-2/5	-1/5	
	w	0	*	*	0	0	*	-1	-1	

Tabelele 4.13 – 4.15

Atenție: se aplică instrucțiunile algoritmului simplex pentru problemele de **minimizare**! Astfel, la prima iterație testul de optimalitate nu este verificat deoarece există costuri reduse **pozitive**. În bază intră coloana A^2 care are cel mai mare cost redus: $\overline{c}_2 = 4 > 0$ În dreapta tabelului au fost afişate rapoartele care definesc –prin minimul lor – coloana care iese din bază.

În faza II se maximizează funcția obiectiv originală f plecând de la soluția admisibilă de bază găsită la finele primei faze – vezi tabelele 4.16 şi 4.17. De fapt, tabelul 4.16 este tabelul 4.15 din care au fost eliminate coloanele variabilelor artificiale,costurile reduse fiind recalculate în raport cu funcția f.

			2	3	0	0	0	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	18	1	0	-3/5	1/5	0	18:1/5 = 90
3	x_2	4	0	1	1/5	-2/5	0	-
0	x_5	8	0	0	2/5	$\boxed{1/5}$	1	8:1/5 = **40**
	f	48	*	*	-3/5	-4/5	*	
2	x_1	10	1	0	-1	0	-1	
3	x_2	20	0	1	1	0	2	
0	x_4	40	0	0	2	1	5	
	f	80	*	*	1	*	4	

Tabelele 4.16-4.17

Recapitulând, algoritmul simplex a examinat patru soluții de bază ale căror proiecții în planul variabilelor originale x_1 , x_2 sunt punctele O , X , M şi N – vezi tabelul 4.18 şi figura 4.5

Baza	Soluția $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$	Proiecția soluției în planul (x_1, x_2)
A^6,A^7,A^5	(0,0,0,0,30,**40**,**30**)	O (0,0)
A^6,A^2,A^5	(0,10,0,0,20,**30**,**0**)	X (0,10)
A^1,A^2,A^5	(18,4,0,0,8,**0**,**0**)	M (18,4)
A^1,A^2,A^4	(10,20,0,40,5,**0**,**0**)	N (10,20)

Tabelul 4.18

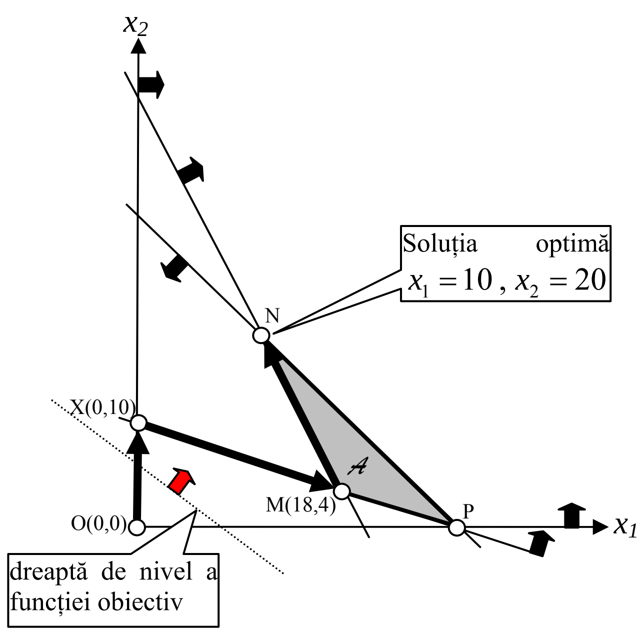


Figura 4.5

În primele două soluții, cel puțin una din variabilele artificiale x_6 sau x_7 are valoare **nenulă**; punctele corespunzătoare O și X sunt **în afara** mulțimii soluțiilor admisibile $\mathcal{A}$! Celelalte două soluții, în care $x_6 = x_7 = 0$ se identifică cu vârfurile M și N ale lui $\mathcal{A}$.

Exemplul 4.8 Cu ajutorul algoritmului simplex vom arăta că programul:

$$(P)\begin{cases} 5x_1 - \ x_2 + \ x_3 \geq 6 \\ 2x_1 + \ x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ -3x_1 + \ x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ (\min) f = 6x_1 + x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

este incompatibil (nu are soluții admisibile)

Scriem forma standard și matricea tehnologică a acesteia:

$$(FSP)\begin{cases} 5x_1 - \ x_2 + \ x_3 - x_4 \qquad\qquad = 6 \\ 2x_1 + \ x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 \qquad = 7 \\ -3x_1 + \ x_2 + 2x_3 \qquad\qquad - x_6 = 2 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 6 \\ (\min) f = 6x_1 + x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 & A^5 & A^6 \end{matrix} \end{array}$$

Pentru formarea bazei unitare de start introducem variabilele artificiale x_7 și x_8 în prima respectiv a treia ecuație din (FSP). Forma bună a programului este:

$$(FBP)\begin{cases} 5x_1 - \ x_2 + \ x_3 - x_4 \qquad\qquad + x_7 \qquad = 6 \\ 2x_1 + \ x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 \qquad\qquad\qquad = 7 \\ -3x_1 + \ x_2 + 2x_3 \qquad\qquad - x_6 \qquad + x_8 = 2 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 6 \\ (\min) f = 6x_1 + x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + M \cdot x_7 + M \cdot x_8 \end{cases}$$

Inițiem procedura simplex cu baza unitară $E = \left[A^7 \ A^5 \ A^8\right]$ - vezi tabelele 4.19 – 4.21. Din ultimul tabel rezultă că **în soluția optimă a (FBP), variabila artificială x_7 are valoare nenulă**: $x_7 = 1$. Se conchide că programul original (P) nu are soluții admisibile (este incompatibil).

			6	1	-2	0	0	0	M	M	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
M	x_7	6	5	-1	1	-1	0	0	1	0	6:1 = 6
0	x_5	7	2	1	3	0	1	0	0	0	7:3 = 2,33
M	x_8	2	-3	1	$\boxed{2}$	0	0	-1	0	1	2:2 = **1**
	f	8M	2M – 6	-1	3M+2	-M	*	-M	*	*	
M	x_7	5	13/2	-3/2	0	-1	0	1/2	1	-1/2	5 : 13/2 = 10/13
0	x_5	4	$\boxed{13/2}$	-1/2	0	0	1	3/2	0	-3/2	4 : 13/2 = **8/13**
-2	x_3	1	-3/2	1/2	1	0	0	-1/2	0	1/2	-
	f	5M - 2	-13M/2 - 3	-3M/2 - 2	*	-M	*	M/2 + 1	*	-3M/2 - 1	
M	x_7	1	0	-1	0	-1	-1	-1	1	1	
6	x_1	8/13	1	-1/13	0	0	2/13	3/13	0	-3/13	
-2	x_3	25/13	0	5/13	1	0	3/13	-2/13	0	2/13	
	f	M - 2/13	*	-M – 16/13	*	-M	-M + 6/13	-M + 22/13	*	-22/13	

:

Tabelele 4.19 – 4.21

Exemplul 4.9 Vom arăta – cu ajutorul algoritmului simplex –că programul:

$$(P)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 21 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ (\max) f = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{cases}$$

are mai multe soluții optime **de bază** şi de aici o **infinitate de soluții optime**!

Introducem variabilele de abatere x_4 şi x_5 în restricțiile inegalități (rezultând forma standard (FSP)) după care, pentru formarea bazei unitare de start, introducem şi variabilele artificiale x_6 şi x_7 în primele două relații. Obținem forma bună:

$$(FBP)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 10 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 21 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 7 \\ (\max) f = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - Mx_6 - Mx_7 \end{cases}$$

Aplicarea algoritmului simplex este afişată în tabelele 4.22 – 4.26. La iterația 4 (tabelul 4.25) s-a găsit soluția optimă a programului (FBP) în care **variabilele artificiale x_6 şi x_7 au valoarea zero**; în consecință forma standard (FSP) are soluția optimă $\mathbf{x}^*$, asociată bazei $\left[A^3 \; A^1 \; A^2\right]$, în care:

$$x_1^* = 13/3 \quad x_2^* = 10/3 \quad x_3^* = 7/3 \quad (\max) f = 21$$

valorile variabilelor de abatere: $x_4^* = 0 \quad x_5^* = 0$

			2	3	1	0	0	-M	-M	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-M	x_6	10	1	1	1	0	0	1	0	10 : 1 = 10
-M	x_7	1	$\boxed{1}$	-1	0	-1	0	0	1	1 : 1 = **1**
0	x_5	21	2	3	1	0	1	0	0	21 : 2 = 10.5
	f	-11M	-2M-2	-3	-M-1	M	*	*	*	
-M	x_6	9	0	2	1	1	0	1	-1	9 : 2 = 4.5
2	x_1	1	1	-1	0	-1	0	0	1	-
0	x_5	19	0	$\boxed{5}$	1	2	1	0	-2	19 : 5 = **3.8**
	f	-9M+2	*	-2M-5	-M-1	-M-2	*	*	2M+2	
-M	x_6	7/5	0	0	$\boxed{3/5}$	1/5	-2/5	1	-1/5	7/5 : 3/5 = **7/3**
2	x_1	24/5	1	0	1/5	-3/5	1/5	0	3/5	24/5 : 1/5 = 24
3	x_2	19/5	0	1	1/5	2/5	1/5	0	-2/5	19/5 : 1/5 = 19
	f	-7M/5 + 21	*	*	-3M/5	-M/5	2M/5 + 1	*	6M/5	
1	x_3	7/3	0	0	1	$\boxed{1/3}$	-2/3	5/3	-1/3	7/3 : 1/3 = **7**
2	x_1	13/3	1	0	0	-2/3	1/3	-1/3	2/3	-
3	x_2	10/3	0	1	0	1/3	1/3	-1/3	-1/3	10/3 : 1/3 = **10**
	f	21	*	*	*	0	1	M	M	
0	x_4	7	0	0	$\boxed{3}$	1	-2	5	-1	7 : 3 = **2.33**
2	x_1	9	1	0	2	0	-1	3	0	9 : 2 = 4.5
3	x_2	1	0	1	-1	0	1	-2	0	
	f	21	*	*	0	*	1	M	M	

Tabelele 4.22 – 4.26

Din tabelul 4.25 rezultă că variabila nebazică x_4 are costul redus **nul**: $\bar{c}_4 = 0$. **Introducerea coloanei $\mathbf{A}^4$ în baza curentă conduce la o altă soluție admisibilă de bază, tot atât de bună ca şi soluția x^* deci optimă!!** (vezi tabelul 4.26). Noua soluție $\mathbf{x}^{**}$ este asociată bazei $\left[A^4 \; A^1 \; A^2\right]$ şi are componentele:

$$x_1^{**} = 9 \quad x_2^{**} = 1 \quad x_3^{**} = 0 \quad (\max) f = 21$$

valorile variabilelor de abatere: $x_4^{**} = 7 \quad x_5^{*} = 0$

Programul original (P) va avea o infinitate de soluții optime care sunt combinații convexe ale soluțiilor de bază x^* și x^{**} adică au forma: $x = \alpha x^* + (1-\alpha)x^{**}$ cu $0 \le \alpha \le 1$ sau, pe componente:

$$x \equiv \begin{cases} x_1 = {}^{13}\!/_3 \cdot \alpha + 9(1-\alpha) = 9 - {}^{14}\!/_3 \cdot \alpha \\ x_2 = {}^{10}\!/_3 \cdot \alpha + 1 - \alpha = 1 + {}^{7}\!/_3 \cdot \alpha \\ x_3 = {}^{7}\!/_3 \cdot \alpha \\ \text{valorile variabilelor de abatere:} \\ x_4 = 7 - 7 \cdot \alpha \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

De exemplu, pentru $\alpha = {}^{3}\!/_7$ propgramul (P) are soluția optimă:

$$x_1 = 7 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 1 \quad (\max) f = 21$$

valorile variabilelor de abatere: $x_4 = 4 \quad x_5 = 0$

care nu este o soluție de bază!!

Probleme propuse

1. Printre soluțiile admisibile ale unui program liniar (P) în formă standard cu trei restricții şi cinci variabile se găsesc şi vectorii:

$$x^1 = (10,5,5,10,2) \quad x^2 = (0,3,7,0,0) \quad x^3 = (5,0,6,2,4) \quad x^4 = (0,0,7,3,4)$$

Ştiind că două şi numai două dintre cele patru soluții sunt soluții de bază, care sunt acestea?

2. Se consideră următoarele afirmații:
i) dacă un program liniar are optim infinit atunci mulțimea soluțiilor sale admisibile este nemărginită;
ii) dacă mulțimea soluțiilor admisibile ale unui program liniar este nemărginită, programul are cu siguranță optim infinit.
Sunt amândouă adevărate?

3. Instrucțiunile logice şi de calcul ale algoritmului simplex sunt:

P $\equiv$ pivotează tabelul simplex curent;
O $\equiv$ aplică criteriul de optimalitate;

I ≡ aplică criteriul de intrare în bază;
E ≡ aplică criteriul de ieşire din bază;
X ≡ aplică criteriul de recunoaştere a optimului infinit.

În ce ordine se succed aceste instrucţiuni într-o iteraţie a algoritmului simplex?

4. i) Ce asigură aplicarea corectă a criteriului de ieşire din bază din algoritmul simplex?
ii) Să presupunem că, în aplicarea algoritmului simplex la rezolvarea manuală a unui program liniar (P), aţi ajuns la un tabel simplex în care, în coloana VVB (≡ **V**alorile **V**ariabilelor **B**azice) a apărut o valoare **negativă**. În ipoteza că toate operaţiile aritmetice au fost bine făcute care este concluzia corectă?

a) aţi greşit la alegerea coloanei care părăseşte baza curentă;
b) programul (P) este incompatibil;
c) nici o problemă, continuaţi aplicarea algoritmului;
d) aţi greşit la alegerea coloanei care intră în baza curentă;
e) programul (P) are optim infinit.

5. i) Care este formula de calcul a soluţiei asociate unei baze B a unui program liniar în formă standard.

ii) Se dă programul liniar:

$$(P)\begin{cases} (\max) f = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 100 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 100 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 120 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Aplicând algoritmul simplex formei standard rezultă că soluţia optimă este asociată bazei $B = \left[A^3, A^1, A^2\right]$ care are inversa $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$. Să se determine componentele soluţiei optime a programului (P).

6. În procesul rezolvării unui program liniar de maximizare s-a ajuns la următorul tabel simplex:

			4	3	2	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	x_1	10	1	-2	3	0	2
	x_4	20	0	-1	2	1	1
	f						

Completați tabelul cu ce lipsește și continuați aplicarea algoritmului simplex.

7. Prin aplicarea algoritmului simplex unui program liniar de maximizare, în formă standard, cu trei restricții și cinci variabile s-a ajuns la următorul tabel simplex:

			3	4	0	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	x_1		1	0	1/5	-4/5	0
	x_2		0	1	2/5	-3/5	0
	x_5		0	0	-3/5	7/5	1
	f						

Știind că termenii liberi ai restricțiilor sunt 12,2, 6 și că baza unitară de start a fost $E = \left[A^3, A^4, A^5\right]$ completați tabelul cu ce lipsește și determinați soluția optimă a programului.

8. Rezolvați cu ajutorul algoritmului simplex următoarele programe liniare:

$$a)\quad (P)\begin{cases} (\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + \ x_2 + \ x_3 \le 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 13 \\ 3x_1 - \ x_2 + \ x_3 \le 5 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$b)\quad (P)\begin{cases} (\max) f = 7x_1 + 4x_2 \\ x_1 + 4x_2 \le 16 \\ 2x_1 + \ x_2 \le 8 \\ x_1 + \ x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ Interpretare geometrică.

$$c)\quad (P)\begin{cases} (\min) f = 5x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 12 \\ 4x_1 + \ x_2 \le 6 \\ x_1 + \ x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ Interpretare geometrică.

$$
d) \quad (P)\begin{cases}
(\min) f = 6x_1 + x_2 - 2x_3 \\
5x_1 - x_2 + x_3 \geq 6 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\
-3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

$$
e) \quad (P)\begin{cases}
(\min) f = x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 - 5x_6 \\
6x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 4 \\
2x_1 - \frac{1}{3}x_2 - x_3 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 3 \\
3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + \frac{1}{2}x_5 + x_6 = 2 \\
x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 6
\end{cases}
$$

Unitatea de învățare 5

ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ
Dualitatea în programarea liniară

Cuprins

5.1 Dualul unui program liniar
5.2 Invarianța la dualitate a formei canonice
5.3 Principalele rezultate ale dualității liniare
5.4 Interpretarea economică a problemei duale
5.5 Algoritmul simplex dual

Probleme propuse

În principiu, oricărui program liniar i se asociază un altul numit **dualul** său şi, în esenţă, **teoria dualităţii** studiază relaţiile dintre cele două programe dar şi interpretările acestora în analiza economică.

Reamintim că o restricţie a unui program liniar s-a numit:

- **concordantă**, dacă este o **inegalitate** de tipul $\leq$ într-o problemă de **maximizare** sau $\geq$ într-o problemă de **minimizare;**

- **neconcordantă**, dacă este o inegalitate de tipul $\geq$ într-o problemă de **maximizare** sau $\leq$ într-o problemă de **minimizare**.

Restricţiile inegalităţi nu fac obiectul acestei clasificări.

Un program liniar în formă canonică este un program în care toate restricţiile sunt inegalităţi concordante şi toate variabilele sale respectă condiţia de nenegativitate.

Orice program liniar poate fi adus la o formă canonică fie de maximizare fie de minimizare prin operaţii care nu alterează nici soluţiile admisibile şi nici pe cele optime.

5.1 Dualul unui program liniar

Fixăm un program liniar (P) cu *m* restricţii şi *n* variabile $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Pentru a conferi construcţiei maxima generalitate vom presupune că, pe lângă variabile ce pot lua numai valori **nenegative** (≥ 0) există şi variabile ce pot lua numai valori **nepozitive** (≤ 0) precum şi variabile **fără restricţie de semn**, care pot lua orice valoare reală.

Asociem programului (P) un nou program liniar (Q) numit **programul dual**, după regulile I-IV de mai jos. În raport cu programul dual (Q), programul (P) se va numi **programul primal**.

I. Dacă în (P) funcţia obiectiv se **maximizează** (se **minimizează**), în programul (Q) funcţia obiectiv se **minimizează** (se **maximizează**).

II. **Restricţiei** de rang *i* din programul primal (P) îi corespunde în (Q) o **variabilă** $u_i \quad i = 1, \cdots, m$. Dacă restricţia de rang *i* este o **inegalitate concordantă** (o **inegalitate neconcordantă**, respectiv o **egalitate**) variabila duală u_i este **nenegativă** (**nepozitivă**, respectiv **fără restricţie de semn**).

III. **Variabilei** x_j din programul primal (P) îi corespunde în dualul (Q) **restricţia** de rang *j*, $j = 1,.., n$.

- membrul stâng al restricţiei duale este combinaţia $u_1 a_{1j} + u_2 a_{2j} + \cdots + u_m a_{mj}$ în care $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$ sunt coeficienţii variabilei x_j din toate restricţiile programului (P);

- membrul drept este coeficientul c_j pe care variabila x_j îl are în funcţia obiectiv din (P);

- dacă variabila x_j este **nenegativă** (**nepozitivă**, respectiv **fără restricţie de semn**) restricţia duală asociată este o **inegalitate concordantă** (**inegalitate neconcordantă**, respectiv **egalitate**)

IV. Funcția obiectiv a programului dual (Q) este $g = u_1 b_1 + u_2 b_2 + \cdots + u_m b_m$ unde $b_1, b_2, \cdots, b_m$ sunt **termenii liberi** ai restricțiilor din programul primal (P).

Prin urmare programul dual are atâtea variabile (restricții) câte restricții (variabile) are programul primal.

Exemplul 5.1 Construcția dualului unui program liniar poate fi schematizată astfel:

$$\begin{array}{c} \text{Programul primal} \qquad\qquad\qquad \text{Programul dual} \\ (P)\left\{\begin{array}{lcl} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 \geq 12 & \leftrightarrow & u_1 \geq 0 \\ x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 = 6 & \leftrightarrow & u_2 \ frs \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 \leq 8 & \leftrightarrow & u_3 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 & \leftrightarrow & 3u_1 + u_2 + 2u_3 \leq 10 \\ x_2 \leq 0 & \leftrightarrow & -u_1 + 4u_2 + 3u_3 \geq 7 \\ x_3 \geq 0 & \leftrightarrow & 2u_1 \qquad + 5u_3 \leq 2 \\ x_4 \text{ frs} & \leftrightarrow & 6u_1 + u_2 - u_3 = 4 \\ (\min) f = 10x_1 + 7_2 + 2x_3 + 4x_4 & & (\max) g = 12u_1 + 6u_2 + 8u_3 \end{array}\right\}(Q) \end{array}$$

Din construcția prezentată rezultă următoarea concluzie importantă:

Dualul programului dual este programul primal.

Referitor la acest fapt, vom spune că dualitatea liniară are proprietatea de **simetrie**. Din această cauză, fiind dat un program liniar (P) şi dualul său (Q), vom spune că (P;Q) este un **cuplu de programe liniare în dualitate** fără a mai specifica în mod expres care problemă este primala şi care duala.

5.2 Invarianța la dualitate a formei canonice

Duala unei forme canonice de maximizare (minimizare) este o formă canonică de minimizare (maximizare).

Afirmația rezultă din schema:

$$(P)\left\{\begin{array}{lcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \cdots, m & \leftrightarrow & u_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, n & \leftrightarrow & \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \geq c_j \quad j = 1, \cdots, n \\ (\max) f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & (\min) g = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \end{array}\right\}(Q)$$

Formă canonică de maximizare $\qquad\qquad$ Formă canonică de minimizare

Matricial, un cuplu de probleme în dualitate, în formă canonică se scrie:

$$(P)\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \qquad\qquad (Q)\begin{cases} uA \ge c \\ u \ge 0 \\ (\min) g = ub \end{cases}$$

cu convențiile notaționale:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \;;\; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{coloană! } ; \; c = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \text{ linie!}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{coloană! } ; \; u = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_m \end{bmatrix} \text{ linie!}$$

Exemplul 5.2 Programele liniare:

$$(P_1)\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 150 \\ \qquad\; x_2 \le \;\; 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ (\max) f = 50x_1 + 40x_2 \end{cases} \qquad (P_2)\begin{cases} 3u_1 \qquad\quad 8u_3 \ge 50 \\ 5u_1 + u_2 + 5u_3 \ge 40 \\ u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_3 \ge 0 \\ (\min) g = 150u_1 + 20u_2 + 300u_3 \end{cases}$$

în care (P_1) este modelul firmei de calculatoare din introducere (secțiunea 1.1 a unității de învățare 1) iar (P_2) este dualul său constituie un cuplu de programe în dualitate , în formă canonică.

Atenție: **forma standard nu se conservă prin trecere la programul dual**!!. Afirmația rezultă din schema:

$$(P)\left\{\begin{array}{lcl} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1,\cdots,m & \leftrightarrow & u_i \;\; \textbf{frs} \qquad i = 1,\cdots,m \\ x_j \ge 0 \qquad j = 1,\cdots,n & \leftrightarrow & \sum\limits_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \ge c_j \quad j = 1,\cdots,n \\ (\max) f = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j & & (\min) g = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i b_i \end{array}\right\}(Q)$$

formă standard de maximizare — programul dual nu este în formă standard!

Matricial

Programul în formă standard de maximizare $(P)\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ (\max) f = cx \end{cases}$ are dualul $(Q)\begin{cases} uA \geq c \\ u\ \textbf{frs} \\ (\min) g = ub \end{cases}$

Analog, programul în formă standard de minimizare $(P)\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ (\min) f = cx \end{cases}$ are dualul $(Q)\begin{cases} uA \leq c \\ u\ \textbf{frs} \\ (\max) g = ub \end{cases}$.

Este important de reținut faptul că **operațiile prin care un program liniar este adus la o formă canonică (de maximizare sau de minimizare) nu alterează construcția programului dual! Acesta este motivul pentru care forma canonică constituie cadrul natural de prezentare a teoriei dualității liniare.**

Exemplul 5.3 Pentru ilustrare, să considerăm programul liniar:

$$(P)\begin{cases} (\max) f = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \quad 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = \ \ 30 \\ \quad 2x_1 + \ \ x_2 + 5x_3 \geq \ \ 50 \\ \quad -x_1 + 6x_2 + 9x_3 \leq 200 \\ x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \leq 0\ ,\ x_3\ \ \text{frs} \end{cases}$$

al cărui dual este programul:

$$(Q)\begin{cases} (\min) g = 30u_1 + 50u_2 + 200u_3 \\ \quad 4u_1 + 2u_2 - \ u_3 \geq \ \ 1 \\ \quad -3u_1 + \ \ u_2 + 6u_3 \leq \ \ 2 \\ \quad 2u_1 + 5u_2 + 9u_3 = -1 \\ \quad u_1\ \ \text{frs}\ ,\ u_2 \leq 0\ ,\ u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Vom transforma acum (P) într-un program echivalent (P′), în formă canonică de minimizare, al cărui dual (Q′) vom arăta că este echivalent cu (Q). Pentru aceasta:

- înlocuim funcția obiectiv $f = x_1 + 2x_2 - x_3$ cu funcția opusă $f' = -f = -x_1 - 2x_2 + x_3$ pe care o vom minimiza;
- înlocuim egalitatea $4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 30$ cu inegalitățile de sens contrar:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \Leftrightarrow -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq -30 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 30 \end{cases}$$

- înlocuim inegalitatea $-x_1+6x_2+9x_3 \le 200$ cu inegalitatea de sens contrar:

$$x_1-6x_2-9x_3 \ge -200$$

- înlocuim $x_2=-x'_2$ cu $x'_2 \ge 0$ şi $x_3=x_3^+-x_3^-$ cu $x_3^+ \ge 0, x_3^- \ge 0$

Mai jos este dat programul (P′) împreună cu dualul său (Q′)

$$(P')\left\{\begin{array}{lcr} (\min) f'=-x_1+2x'_2+x_3^+-x_3^- & & (\max) g'=-30u_1^+ +30u_1^- +50u'_2-200u_3 \\ -4x_1-3x'_2-2x_3^+ +2x_3^- \ge -30 & \leftrightarrow & u_1^+ \ge 0 \\ 4x_1+3x'_2+2x_3^+ -2x_3^- \ge 30 & \leftrightarrow & u_1^- \ge 0 \\ 2x_1-x'_2+5x_3^+ -5x_3^- \ge 50 & \leftrightarrow & u'_2 \ge 0 \\ x_1+6x'_2-9x_3^+ +9x_3^- \le -200 & \leftrightarrow & u_3 \ge 0 \\ x_1 \ge 0 & \leftrightarrow & -4u_1^+ +4u_1^- +2u'_2+u_3 \le -1 \\ x'_2 \ge 0 & \leftrightarrow & -3u_1^+ +3u_1^- -u'_2+6u_3 \le 2 \\ x_3^+ \ge 0 & \leftrightarrow & -2u_1^+ +2u_1^- +5u'_2-9u_3 \le 1 \\ x_3^- \ge 0 & \leftrightarrow & 2u_1^+ -2u_1^- -5u'_2+9u_3 \le -1 \end{array}\right\}(Q')$$

Efectuând substituțiile:

$$u_1^+ - u_1^- = u_1 \Rightarrow u_1 \text{ frs}$$
$$u'_2=-u_2 \Rightarrow u_2 \le 0$$

programul (Q′) se rescrie:

$$(Q')\begin{cases} (\max) g'=-30u_1-50u_2-200u_3 \\ -4u_1-2u_2+u_3 \le -1 \\ -3u_1+u_2+6u_3 \le 2 \\ -2u_1-5u_2-9u_3 \le 1 \\ 2u_1+5u_2+9u_3 \le -1 \\ u_1 \text{ frs}, u_2 \le 0, u_3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow (Q)\begin{cases} (\min) g=30u_1+50u_2+200u_3 \\ 4u_1+2u_2-u_3 \ge 1 \\ -3u_1+u_2+6u_3 \le 2 \\ 2u_1+5u_2+9u_3=-1 \\ u_1 \text{ frs}, u_2 \le 0, u_3 \ge 0 \end{cases}$$

5.3 Principalele rezultate ale dualității liniare

Teorema 1 Fie (P) un program liniar în care funcția obiectiv f se **maximizează** şi fie (Q) dualul său, în care funcția obiectiv g se **minimizează**. Presupunem că programele (P) şi (Q) sunt **compatibile** şi fie $\overline{x}$ respectiv $\overline{u}$ o soluție **admisibilă oarecare** a programului (P), respectiv a programului (Q). Atunci:

i) $f(\overline{x}) \le g(\overline{u})$
ii) Dacă $f(\overline{x}) = g(\overline{u})$ atunci $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ sunt soluții **optime** ale programelor (P) respectiv (Q).

Demonstrație.i) Putem presupune că (P) şi (Q) sunt forme canonice:

$$(P)\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \qquad\qquad (Q)\begin{cases} uA \ge c \\ u \ge 0 \\ (\min) g = ub \end{cases}$$

Prin ipoteză: $\begin{cases} A\overline{x} \le b \\ \overline{x} \ge 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} \overline{u}A \ge c \\ \overline{u} \ge 0 \end{cases}$

Atunci: $\begin{cases} A\overline{x} \le b \\ \overline{u} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{u}A\overline{x} \le \overline{u}b$; $\begin{cases} \overline{u}A \ge c \\ \overline{x} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{u}A\overline{x} \ge c\overline{x}$

Rezultă: $c\overline{x} \le \overline{u}A\overline{x} \le \overline{u}b$ şi deci: $f(\overline{x}) \le g(\overline{u})$.

ii) Dacă $c\overline{x} = \overline{u}b$ şi $\overline{x}$ nu ar fi soluția optimă a programului (P) ar exista o soluție admisibilă $\overline{x}'$ a lui (P) mai bună decât $\overline{x}$ în sensul că $c\overline{x}' > c\overline{x}$. Ar rezulta că $c\overline{x}' > \overline{u}b \Leftrightarrow f(\overline{x}') > g(\overline{u})$ contrar celor demonstrate mai înainte.

Observație: Din teorema 1 rezultă în particular că dacă (P) şi (Q) sunt programe compatibile atunci ambele au optim finit şi $(\max) f \le (\min) g$. În fapt, avem chiar egalitate, aşa cum arată următoarea:

Teorema 2 (teorema fundamentală a dualității) Orice cuplu de programe liniare în dualitate se găseşte în una şi numai în una din următoarele trei situații:

I) Ambele programe sunt compatibile. **Atunci ambele programe au soluții optime şi valorile optime ale funcțiilor obiectiv coincid.**
II) Numai unul dintre programe este compatibil celălalt fiind incompatibil. **Atunci programul compatibil are optim infinit.**
III) Ambele programe sunt incompatibile.

Notă: „Substanța" teoremei fundamentale este dată de afimațiile subliniate; limitele impuse acestei lucrări nu permit justificarea acestor afirmații. O precizare la prima aserțiune este dată în următoarea:

Teorema 3 Fie (P) un program liniar în formă standard cu optim finit, dat împreună cu dualul său (Q)

$$(P)\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \qquad\qquad (Q)\begin{cases} uA \geq c \\ u \;\; \textbf{frs} \\ (\min) g = ub \end{cases}$$

şi fie B o bază admisibilă a lui (P) a cărei soluție asociată $x^* = x(B)$ este optimă. Atunci vectorul:

$$u^* = c^B B^{-1}$$

este o soluție optimă a programului dual (Q).

Demonstrație: Teorema 3 va fi o consecință a teoremei 1 dacă demonstrăm că:

i) u^* este o soluție a problemei (Q) adică $u^* A \geq c$;
ii) $f(x^*) = g(u^*)$

În notațiile introduse în secțiunile precedente avem:

i) $u^* A - c = u^*[B\,,S] - [c^B\;,c^S] = [u^* B - c^B\;,u^* S - c^S] = [c^B - c^B\;,c^B B^{-1} S - c^S] = [0\,,\bar{c}] \geq 0$
deoarece B este o bază optimă;
ii) $f(x^*) = cx^* = c^B B^{-1} b = u^* b = g(u^*)$

Foarte important: Soluția optimă $u^* = c^B B^{-1}$ a programului dual (Q) se poate citi din tabelul simplex optim al programului primal (P) fiind formată din mărimile:

$$z_j = c^B \overline{A}^j = \sum_{i \in I} c_i \overline{a}_{ij}$$

corespunzătoare coloanelor A^j care au format baza unitară de start (după cum se ştie deja, coloanele $\overline{A}^j$ corespunzătoare coloanelor A^j din baza unitară de start formează inversa B^{-1} a bazei optime!! Vezi secțiunea 4.3 a unității de învățare 4).

În continuare fixăm un cuplu (P;Q) de programe liniare în dualitate. Se ştie că fiecărei variabile din (P) sau din (Q) îi corespunde o restricție în cealaltă problemă. Prin definiție, **ecartul** unei restricții este diferența dintre cei doi membri ai săi. Evident, dacă restricția este o egalitate ecartul său este zero în orice soluție a programului din care face parte restricția. Vom nota cu $\mathcal{S}$(P,Q) ansamblul relațiilor de forma:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{VARIABILĂ}\\ \text{din (P) sau din (Q)}\end{array} \times \begin{array}{c}\text{ECARTUL restricției}\\ \text{asociate în duală}\end{array} = 0}$$

cu convenția de a nu include în sistem relațiile în care ecartul este identic zero. Relațiile din sistemul $\mathcal{S}$(P,Q) se numesc **relații de complementaritate**.

Exemplul 5.4 Pentru cuplul de probleme în dualitate:

$$(P)\left\{\begin{array}{lcl} x_1 \qquad + 3x_3 \le 20 & \leftrightarrow & u_1 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \qquad \ge 35 & \leftrightarrow & u_2 \le 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 30 & \leftrightarrow & u_3 \text{ frs} \\ x_1 \ge 0 & \leftrightarrow & u_1 + 2u_2 + 3u_3 \ge 8 \\ x_2 \ge 0 & \leftrightarrow & u_2 - u_3 \ge -6 \\ x_3 \ge 0 & \leftrightarrow & 3u_1 + 2u_3 \ge 7 \\ (\max) f = 8x_1 - 6x_2 + 7x_3 & & (\min) g = 20u_1 + 35u_2 + 30u_3 \end{array}\right\}(Q)$$

sistemul relațiilor de complementaritate este format din egalitățile:

$$\mathcal{S}(\mathrm{P,Q})\begin{cases} u_1(\ x_1 + \qquad 3x_3 - 20) = 0 & (1) \\ u_2(2x_1 + \ x_2 \qquad - 35) = 0 & (2) \\ x_1(\ u_1 + 2u_2 + 3u_3 - 8) = 0 & (3) \\ x_2(\qquad u_2 - \ u_3 + 6) = 0 & (4) \\ x_3(3u_1 \qquad + 2u_3 - 7) = 0 & (5) \end{cases}$$

Relația $u_3(3x_1 - x_2 + 2x_3 - 30) = 0$ a fost exclusă deoarece ecartul din paranteză este identic zero!

Exemplul 5.5 Pentru cuplul de probleme în dualitate în formă canonică:

$$(P)\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \qquad\qquad (Q)\begin{cases} uA \ge c \\ u \ge 0 \\ (\min) g = ub \end{cases}$$

sistemul $\mathcal{S}$(P,Q) are forma matricială:

$$\begin{cases} u(Ax - b) = 0 \\ (uA - c)x = 0 \end{cases}$$

(cu notațiile matriciale introduse în secțiunea 5.2)

Exemplul 5.6 Pentru cuplul:

$$(P)\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \qquad\qquad (Q)\begin{cases} uA \geq c \\ u \ \ \textbf{frs} \\ (\min) g = ub \end{cases}$$

în care (P) este o formă standard, sistemul $\mathcal{S}$(P,Q) se reduce la:

$$(uA - c)x = 0$$

Cu aceste pregătiri putem enunța:

Teorema 4 (Teorema ecarturilor complementare) Fie (P,Q) un cuplu de programe liniare în dualitate şi fie $\mathcal{S}$(P,Q) sistemul relațiilor de complementaritate. Atunci, un cuplu de soluții **admisibile** $(\bar{x}, \bar{u})$ ale programelor (P) respectiv (Q) este un cuplu de soluții **optime** ale celor două programe, dacă şi numai dacă $\bar{x}$ şi $\bar{u}$ verifică sistemul $\mathcal{S}$(P,Q).

Demonstrație: Fără a restrânge generalitatea putem presupune că (P) şi (Q) sunt forme canonice:

$$(P)\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \qquad\qquad (Q)\begin{cases} uA \geq c \\ u \geq 0 \\ (\min) g = ub \end{cases}$$

(aceasta deoarece, orice program liniar poate fi transformat într-o formă canonică echivalentă). Sistemul $\mathcal{S}$(P,Q) se compune din relațiile matriciale:

$$\begin{cases} u(Ax - b) = 0 \\ (uA - c)x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Presupunem că $\bar{x}$ şi $\bar{u}$ sunt soluții optime ale programelor (P) respectiv (Q). Probăm că $\bar{x}$ şi $\bar{u}$ satisfac sistemul $\mathcal{S}$(P,Q).

Fie $\alpha = \bar{u}(b - A\bar{x})$ şi $\beta = (\bar{u}A - c)\bar{x}$ .Evident $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ deoarece $\bar{x}$ şi $\bar{u}$ sunt soluții admisibile ale celor două programe. Atunci:

$$\alpha + \beta = \bar{u}b - \bar{u}A\bar{x} + \bar{u}A\bar{x} - c\bar{x} = \bar{u}b - c\bar{x} = 0$$

deoarece, în baza teoremei fundamentale a dualității, optimele $c\bar{x}$ şi $\bar{u}b$ ale celor două programe coincid!

Din $\alpha + \beta = 0$ şi $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ rezultă $\alpha = \beta = 0$ ceeace înseamnă că $\bar{x}$ şi $\bar{u}$ satisfac $\mathcal{S}$(P,Q).

$\Leftarrow$ Presupunem că $\bar{x}$ şi $\bar{u}$ sunt soluții admisibile ale programelor (P) respectiv (Q) care satisfac sistemul $\mathcal{S}$(P,Q). Din $\bar{u}(b - A\bar{x}) = 0$ şi $(\bar{u}A - c)\bar{x} = 0$ rezultă $c\bar{x} = \bar{u}A\bar{x} = \bar{u}b$ şi în baza teoremei 1 soluțiile $\bar{x}$ şi $\bar{u}$ sunt într-adevăr optime.

Foarte important: teorema ecarturilor complementare ne permite să determinăm soluția optimă a unui program liniar dacă ştim soluția optimă a dualului său. Altfel spus, **rezolvarea unui program liniar este echivalentă cu rezolvarea dualului său.**

Exemplul 5.7 Considerăm cuplul de programe în dualitate din exemplul 5.3. Vom determina soluția optimă a programului (P) ştiind că dualul (Q) are soluția optimă $u_1^* = 0$, $u_2^* = -2$, $u_3^* = 4$ .Introducem u^* în relațiile (1) – (5) din sistemul $\mathcal{S}$(P,Q):

(1) → nu dă nimic (în sensul că paranteza poate avea orice valoare!)
(2) → **la optim** $2x_1 + x_2 - 35 = 0$ deoarece $u_2^* = -2 \neq 0$
(3) → nu dă nimic;
(4) → nu dă nimic;
(5) → **la optim** $x_3 = 0$ deoarece $3u_1^* + 2u_3^* - 7 = 1 \neq 0$

Prin urmare, soluția optimă a programului (P) trebuie să verifice relațiile:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 35 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

rezultate din analiza întreprinsă, precum şi restricția egalitate din (P):

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 30$$

Rezolvând sistemul format se găseşte $x_1^* = 13$, $x_2^* = 9$, $x_3^* = 0$.

5.4 Interpretarea economică a problemei duale

Să considerăm un cuplu de programe liniare în dualitate în formă canonică:

$$(P)\left\{\begin{array}{llcll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i & i = 1,\cdots,m & \leftrightarrow & u_i \ge 0 & \\ x_j \ge 0 & j = 1,\cdots,n & \leftrightarrow & \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \ge c_j & \\ (\max) f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & (\min) g = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i & \end{array}\right\}(Q)$$

Presupunem că (P) modelează activitatea unui sistem de producție în care m **resurse** $R_1, R_2, \cdots, R_m$ (forță de muncă, capacități de producție, materii prime, servicii, bani etc) disponibile în cantitățile limitate $b_1, b_2, \cdots, b_m$ sunt transformate în n **bunuri** $G_1, G_2, \cdots, G_n$. Sistemul realizează un **venit** din vânzarea bunurilor $G_1, G_2, \cdots, G_n$ la **prețurile** $c_1, c_2, \cdots, c_n$.Transformarea resurselor R_i în bunurile G_j este descrisă de **matricea consumurilor unitare** $\lfloor a_{ij} \rfloor$ $i = 1, \cdots, m \quad j = 1, \cdots, n$.

Programul (P) formalizează cerința de a determina în ce cantități vor fi produse bunurile din resursele existente astfel încât sistemul să obțină cel mai mare venit.

În acest context se pune problema determinării unui **conținut economic coerent** pentru problema duală (Q).
Fie:

$f^* \equiv$ venitul maxim posibil de obținut din resursele date;

$x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^* \equiv$ cantitățile de bunuri care realizează venitul maxim f^*.

$x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ este deci **soluția optimă** a programului (P) iar f^* este **optimul** acestui program. Avem relația:

$$f^* = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \cdots + c_n x_n^* \tag{1}$$

Deoarece venitul maxim f^* rezultă **în exclusivitate** din transformarea resurselor în bunuri (se presupune că tot ceeace se produce se şi vinde!) rezultă **în mod logic** că fiecare resursă are un anumit **aport (contribuție)** la formarea lui f^*. În evaluarea acestor contribuții vom folosi aceleaşi **ipoteze de liniaritate** care ne-au condus la programul liniar (P) şi anume:

- aportul unei resurse la formarea venitului maxim poate fi exprimat prin **orice număr real nenegativ**;
- acest aport este **direct proporțional** cu cantitatea de resursă disponibilă;
- aporturile diferitelor resurse sunt independente între ele astfel că venitul maxim este **suma** aporturilor individuale.

În acest context, notăm cu $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$ aportul a câte o unitate din resursele $R_1, R_2, \cdots, R_m$ la formarea venitului maxim f^*. Ipotezele de liniaritate sus amintite implică:

$$u_1^* \geq 0 \, , u_2^* \geq 0 \, , \cdots, u_m^* \geq 0 \tag{2}$$

$$f^* = u_1^* b_1 + u_2^* b_2 + \cdots + u_m^* b_m \tag{3}$$

La producerea unei unități din bunul G_j se folosesc cantitățile $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$ din resursele $R_1, R_2, \cdots, R_m$. Aportul acestor cantități la venitul f^* este dat de expresia: $u_1^* a_{1j} + u_2^* a_{2j} + \cdots + u_m^* a_{mj}$. Pe de altă parte, o dată produsă şi vândută, o unitate din bunul G_j contribuie la f^* cu prețul său c_j. Deoarece f^* rezultă numai din transformarea resurselor în bunuri şi vânzarea acestora este logic ca

$$u_1^* a_{1j} + u_2^* a_{2j} + \cdots + u_m^* a_{mj} \geq c_j \tag{4}$$

Relațiile (1) – (4) coroborate cu teorema fundamentală a dualității arată că aporturile unitare $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$ ale resurselor $R_1, R_2, \cdots, R_m$ la formarea venitului maxim f^* constituie soluția optimă a programului dual (Q).

Deoarece aportul unitar al unei resurse este exprimat în unități monetare/unitatea de resursă urmează că acest aport este practic un **preț** ataşat resursei respective. Totuşi, acest aport unitar nu reflectă valoarea intrinsecă a resursei respective şi ca urmare nu trebuie identificat cu prețul real al resursei. El cuantifică **importanța** resursei în contextul dat, context caracterizat prin:

- resurse disponibile în cantități limitate;
- „tehnologie liniară” de transformare a resurselor în bunuri;
- prețuri determinate pentru bunurile produse şi vândute.

Prin urmare, dacă în aceste elemente intervin schimbări este posibil ca şi aporturile resurselor să se modifice, măcar că „fizic”, resursele au rămas aceleaşi! Iată motivul pentru care în literatura de specialitate, aceste aporturi unitare se numesc **prețuri umbră** sau **evaluări obiectiv determinate**.
Relația (3) arată că venitul maxim f^* depinde **liniar** – în anumite limite totuşi! – de cantitățile disponibile $b_1, b_2, \cdots, b_m$ de resurse prin intermediul aporturilor unitare $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$**.** Atunci relația:

$$\frac{\partial f}{\partial b_i} = u_i^* \quad i = 1, \cdots, m$$

arată că o creştere cu o unitate a disponibilului actual al resursei R_i implică o creştere a venitului maxim cu valoarea u_i^*.

Considerațiile precedente se pot dezvolta şi în contexte mai generale. Să presupunem că într-o problemă de planificare a producției resursa R_i reprezintă o anumită categorie de forță de muncă care trebuie utilizată **în întregime**. Restricția care formalizează această cerință va fi o **egalitate** şi ca urmare, variabila duală asociată u_i va putea lua **orice valoare reală**. Dacă valoarea optimă u_i^* este **negativă** aceasta va însemna că cerința utilizării integrale a resursei R_i este **„excesivă”,** o eventuală creştere a disponibilului ei având efect negativ asupra obiectivului maximizării venitului. Din contră, o **relaxare** a cerinței, adică admiterea posibilității folosirii **parțiale** a resursei în cauză, poate duce la rezultate mai bune!

Funcționarea **optimală** a sistemului de producție modelat de programul liniar (P) poate fi descrisă alternativ prin următoarea situație de **„echilibru”**.
Presupunem date următoarele **„propuneri”**:

- o combinație $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ de cantități de bunuri ce ar putea fi produse din disponibilele $b_1, b_2, \cdots, b_m$ de resurse, aceasta însemnând:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \le b_i & i = 1, \cdots, m \\ x_j^* \ge 0 & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

- un sistem de evaluări unitare $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$ ale resurselor cu proprietatea că prețul fiecărui bun este acoperit de evaluarea resurselor încorporate într-o unitate din bunul respectiv:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} \geq c_j & j = 1, \cdots, n \\ u_i^* \geq 0 & i = 1, \cdots, m \end{cases}$$

Presupunem că au loc implicațiile:

I) dacă evaluarea unitară a unei resurse R_i este **pozitivă** atunci resursa este **integral** utilizată în producerea bunurilor, în cantitățile specificate:

$$u_i^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$$

II) dacă resursa R_i este **excedentară**, în sensul că disponibilul depășește necesarul pentru producerea cantităților specificate de bunuri atunci evaluarea resursei este **zero**, altfel spus, resursa este „**gratuită**":

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \quad \Rightarrow \quad u_i^* = 0$$

III) dacă bunul G_j se produce **efectiv** atunci evaluarea resurselor încorporate într-o unitate este egală cu prețul bunului:

$$x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} = c_j$$

IV) dacă evaluarea resurselor încorporate într-o unitate din bunul G_j depășește prețul bunului atunci G_j este propus a **nu se produce**:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} > c_j \quad \Rightarrow \quad x_j^* = 0$$

Este evidentă îndeplinirea relațiilor de complementaritate din teorema ecarturilor complementare:

$$u_i^* (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) = 0 \quad i = 1, \cdots, m$$

$$(\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij} - c_j) x_j^* = 0 \quad j = 1, \cdots, n$$

care atestă că $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ constituie combinația în care bunurile ar trebui produse pentru ca venitul să fie maxim.

5.5 Algoritmul simplex dual

Reluăm programul liniar general, în formă standard:

$$(P)\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ (\max) f = cx \end{cases}$$

în ipotezele şi notațiile introduse în secțiunile unității de învățare 3.
În raport cu o bază oarecare B a programului (P) am definit următoarele concepte:

- **soluția asociată** $x(B) = \begin{bmatrix} x^B \\ x^S \end{bmatrix}$ dată de formulele:

  $x^B = B^{-1}b$, $x^S = 0$ sau, pe componente: $x_i = \overline{b_i}$, $i \in I$ $\quad x_j = 0$, $j \in J$

- **costurile reduse asociate,** reunite în vectorul:

  $\overline{c} = c^B B^{-1} S - c^S$ sau pe componente $\overline{c}_j = \underbrace{c^B B^{-1} A^j}_{z_j} - c_j = z_j - c_j \quad j \in J$

Vom spune că baza B este:

- p**rimal admisibilă** dacă soluția $x(B)$ asociată bazei B este admisibilă, adică $\overline{b_i} \geq 0$, $i \in I$;

- d**ual admisibilă** dacă se verifică criteriul de optimalitate al algoritmului simplex adică: $\overline{c}_j \geq 0$, $j \in J$ în problemele de maximizare sau $\overline{c}_j \leq 0$, $j \in J$ în cele de minimizare.

Soluția asociată $x(B)$ se va numi primal sau dual admisibilă dacă baza B este primal sau dual admisibilă.

Evident, dacă baza B este simultan primal şi dual admisibilă atunci ea este chiar optimă în sensul că soluția asociată este o soluție optimă a programului (P).

Algoritmul simplex prezentat în capitolul anterior şi căruia îi vom zice în continuare **algoritmul simplex primal** determină o bază optimă prin generarea unei secvențe (finite) de baze primal admisibile. Pentru pornire este necesară cunoaşterea unei asemenea baze.

Algoritmul simplex dual datorat lui LEMKE (1953) determină o bază optimă pentru programul (P) prin generarea unei secvențe (finite) de baze dual admisibile şi are nevoie la start de o asemenea bază.

Instrucțiunile algoritmului simplex dual sunt următoarele:

Start: se presupune cunoscută o bază dual admisibilă B precum şi tabelul simplex T_B asociat acesteia.

Conținutul unei iterații:

Pasul 1 (Testul de optimalitate) Dacă $\overline{b}_i \geq 0$, $i \in I$ (adică toate componentele coloanei VVB sunt **nenegative**) **Stop**: soluția asociată bazei B este **optimă** (fiind simultan primal şi dual admisibilă). În caz contrar se trece la:

Pasul 2 (Criteriul de ieşire din bază) Se determină indicele bazic $r \in I$ cu proprietatea:

$$\overline{b}_r = \min \left\{ \overline{b}_i \ , i \in I \right\} \tag{1}$$

Coloana A^r părăseşte baza curentă.

Pasul 3 (testul de recunoaştere a incompatibilității) dacă $\overline{a}_{rj} \geq 0$, $j \in J$ (adică toate componentele liniei variabilei bazice x_r situate în corpul mare al tabelului simplex sunt **nenegative**) **Stop**: programul (P) este **incompatibil**. În caz contrar se trece la:

Pasul 4 (criteriul de intrare în bază) Se determină indicele nebazic $k \in J$ cu formula:

$$\left| \frac{\overline{c}_k}{\overline{a}_{rk}} \right| = \min \left\{ \left| \frac{\overline{c}_j}{\overline{a}_{rj}} \right| , \ j \in J \ cu \ \overline{a}_{rj} < 0 \right\} \tag{2}$$

Coloana A^k intră în baza curentă.

Pasul 5 (Pivotare) Se construieşte tabelul simplex $T_{B'}$ asociat bazei B' dedusă din B prin înlocuirea coloanei A^r cu coloana A^k prin **pivotarea** tabelului simplex T_B cu **pivotul** $\overline{a}_{rk} < 0$.

Se actualizează baza curentă B ← B' şi se revine la pasul 1 în cadrul unei noi iterații.

Observații (similare celor făcute pe marginea algoritmului simplex primal):

- alegerea coloanei care părăseşte baza curentă după relația (1) are menirea de a accelera procesul iterativ;
- alegerea coloanei care intră în baza curentă după relația (2) ne asigură că şi noua bază va fi dual admisibilă;
- în caz că minimul din (1) sau minimul din (2) nu este unic se aplică regula lui Bland: se alege indicele **cel mai mic** care verifică relația respectivă.

Important: Algoritmul simplex dual nu trebuie privit ca o alternativă a algoritmului primal! Acesta este şi motivul pentru care nu discutăm modalitățile de determinare a unei baze dual admisibile de start. În principiu, orice problemă de programare liniară se va rezolva cu ajutorul algoritmului simplex primal şi numai în acele cazuri în care vor rezulta baze dual admisibile se va aplica algoritmul simplex dual.

Exemplul 5.8 Pentru un program liniar în formă canonică de maximizare şi în care toți termenii liberi ai restricțiilor sunt nenegativi, rezolvarea (manuală) cu algoritmul simplex primal, nu pune probleme deosebite: o bază (primal) admisibilă de start este formată din coloanele variabilelor de abatere!

Prin simetrie, aplicarea algoritmului simplex dual unei forme canonice de minimizare, în care toți coeficienții funcției obiectiv sunt nenegativi, este tot atât de simplă: coloanele variabilelor de abatere asigură o bază dual admisibilă de start!
Pentru ilustrare vom considera programul liniar:

$$(P)\begin{cases}(\min) f = 12x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{cases}$$

Introducem variabilele de abatere x_4 şi x_5 după care înmulțim cu -1 egalitățile rezultate:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \qquad &= -3 \\ -4x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_5 &= -4 \end{aligned}$$

Soluția asociată bazei $E = \lfloor A^4, A^5 \rfloor$ nu este admisibilă:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = -3 \quad x_5 = -4$$

dar dacă evaluăm costurile reduse $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ constatăm că ele verifică criteriul de optimalitate al algoritmului simplex – bineînțeles pentru problemele de minimizare! – vezi tabelul simplex 5.1 Prin urmare, baza $E = \lfloor A^4, A^5 \rfloor$ este dual admisibilă.
Să urmărim aplicarea instrucțiunilor algoritmului simplex dual (instrucțiunile evident verificate nu au mai fost specificate!)

			12	2	6	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	3	2	-1	1	0
0	x_5	-4	-4	$\boxed{-1}$	-1	0	1
	f	0	-12	-2	-6	*	*
0	x_4	-11	$\boxed{-5}$	0	-3	1	2
2	x_2	4	4	1	1	0	-1
	f	8	-4	*	-4	*	-2
12	x_1	11/5	1	0	3/5	-1/5	-2/5
2	x_2	-24/5	0	1	$\boxed{-7/5}$	4/5	3/5
	f	84/5	*	*	-8/5	-4/5	-18/5
12	x_1	1/7	1	3/7	0	1/7	-1/7
6	x_3	24/7	0	-5/7	1	-4/7	-3/7
	f	156/7	*	-8/7	*	-12/7	-30/7

Tabelele 5.1 – 5.4

Iterația 1 (tabelul 5.1)

Pasul 2 Conform relației (1), coloana A^5 iese din baza curentă.

Pasul 4 Se aplică relația (2): $\min\left\{\left|\frac{-12}{-4}\right|, \left|\frac{-2}{-1}\right|, \left|\frac{-6}{-1}\right|\right\} = 2 \Rightarrow$ coloana A^2 intră în baza curentă.

Pasul 5 Pivotarea tabelului 5.1 cu pivotul încadrat **-1** conduce la tabelul 5.2

Iterația 2 (tabelul 5.2)

Pasul 2 Coloana A^4 iese din baza curentă (unic candidat!).

Pasul 4 Se aplică relația (2): $\min\left\{\left|\frac{-4}{-5}\right|, \left|\frac{-4}{-3}\right|\right\} = \frac{4}{5} \Rightarrow$ coloana A^1 intră în baza curentă.

Pasul 5 Pivotarea tabelului 5.2 cu pivotul încadrat **-5** conduce la tabelul 5.3

Iterația 3 (tabelul 5.3)

Pasul 2 Coloana A^2 iese din baza curentă (unic candidat!).
Pasul 4 Coloana A^3 intră în baza curentă (unic candidat!).
Pasul 5 Pivotarea tabelului 5.3 cu pivotul încadrat **-7/5** conduce la tabelul 5.4

Iterația 4 (tabelul 5.4)

Pasul 1 Soluția curentă este simultan primal şi dual admisibilă .

Soluția optimă a programului (P) are componentele:

$$x_1^* = \frac{1}{7} \quad , \quad x_2^* = 0 \quad , \quad x_3^* = \frac{24}{7} \quad ; \quad (\min) f = \frac{156}{7}$$

Probleme propuse

1. Scrieți dualele următoarelor programe liniare

a) $\begin{cases} (\max) f = 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 10x_4 + 8x_5 \\ -x_1 \qquad + 2x_3 + 3x_4 - x_5 \geq 10 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 + 5x_5 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \,;\, x_3, x_4 \geq 0 \,;\, x_5 \text{ frs} \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\max) f = 4x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (\min) f = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

2. Se consideră un program liniar (P) împreună cu dualul său (Q). Fie u_1 variabila din (Q) asociată primei restricții din (P). Dacă în soluția optimă a dualului(Q), u_1 are o valoare **negativă** care din următoarele afirmații – referitoare la prima restricție din (P) – este **întotdeauna** adevărată?

a) este o inegalitate neconcordantă;
b) este o inegalitate concordantă;
c) este o egalitate;
d) este o egalitate sau o inegalitate concordantă;
e) este o egalitate sau o inegalitate neconcordantă.

3. Să se scrie dualele următoarelor programe liniare:

$$a)\begin{cases}(\min) f = 5x_1 - 6x_2 \\ -x_1 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{cases} \qquad b)\begin{cases}(\max) f = 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{cases} \qquad c)\begin{cases}(\min) f = x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{cases}$$

Utilizând metoda grafică sau algoritmul simplex să se rezolve cuplurile de probleme obținute. Să se compare valorile funcțiilor obiectiv în soluțiile optime atunci când acestea există.

4. Se dă programul liniar:

$$(P)\begin{cases}(\min) g = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\end{cases}$$

Se notează cu V numărul vârfurilor mulțimii soluțiilor admisibile ale programului dual (Q) şi cu u^* soluția optimă a lui (Q). Atunci:

a) $V = 4$, $u^* = \left(\frac{11}{5}, \frac{18}{5}\right)$; b) $V = 4$, $u^* = \left(\frac{9}{8}, \frac{3}{8}\right)$; c) $V = 3$, $u^* = \left(\frac{11}{5}, \frac{18}{5}\right)$; d) $V = 3$, $u^* = \left(\frac{9}{8}, \frac{3}{8}\right)$;

e) $V = 5$, $u^* = \left(\frac{9}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

5. a) Ce particularitate prezintă un program liniar în al cărui dual variabilele nu au restricție de semn?
b) Ce particularitate are un program liniar dacă programul dual asociat este în forma standard?
c) Ce se poate spune despre un program liniar al cărui dual are optim infinit?
d) Ce se poate spune despre un program liniar al cărui dual este un program incompatibil?
e) Ce se poate spune despre un program liniar al cărui dual are optim finit?

6. a) Scrieți dualul (Q) asociat programului liniar:

$$(P)\begin{cases}(\max) f = x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

b) Se dau următoarele cupluri de soluții **admisibile** pentru cuplul de programe în dualitate (P,Q):

$$\begin{cases}x = (3\,,\,\frac{3}{2}) \\ u = (\frac{1}{4}\,,\,0\,,\,\frac{1}{4})\end{cases} \qquad \begin{cases}x = (\frac{7}{3}\,,\,\frac{5}{3}) \\ u = (1\,,1\,,1)\end{cases}$$

Care dintre ele este un cuplu de soluții optime?

7. Scrieți dualul (Q) asociat programului liniar:

$$(P)\begin{cases}(\min) f = 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

Care dintre următoarele două cupluri de vectori este un cuplu de soluții optime ale celor două programe?

$$\begin{cases}x = (\frac{4}{5}\,,\,\frac{4}{5}) \\ u = (\frac{1}{5}\,,\,\frac{1}{5}\,,\,\frac{1}{5})\end{cases} \qquad \begin{cases}x = (\frac{3}{5}\,,\,\frac{6}{5}) \\ u = (\frac{2}{5}\,,\,\frac{1}{5}\,,\,0)\end{cases}$$

8. Se consideră programul liniar:

$$(P)\begin{cases}(\max) f = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \le 30 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 \le 22 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0\end{cases}$$

împreună cu dualul său (Q) în care variabilele u_1, u_2 sunt asociate primei respectiv celei de a doua restricții din (P). Fie $x^{\bullet} = (x_1^{\bullet}, x_2^{\bullet}, x_3^{\bullet})$ și $u^{\bullet} = (u_1^{\bullet}, u_2^{\bullet})$ soluțiile optime ale celor două programe.

Dacă $x_2^{\bullet} > 0$ şi $u_1^{\bullet} = 3$ atunci valoarea maximă a funcţiei obiectiv f este:

a) 216; b) 76 ; c) 164 ; d) 52 ; e) 112

9. Se consideră programul liniar:

$$(P)\begin{cases}(\max) f = 50x_1 + 40x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 150 \\ \qquad x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

Fie u_1, u_2, u_3 variabilele programului dual.Ştiind că în soluţia optimă a programului dual avem u_1>0 şi u_3>0, valoarea maximă a funcţiei obiectiv din (P) este:

a) 1980 ; b) 1890 ; c) 2120 ; d) 2080 ; e) 2020

10. Se consideră următoarea problemă de maximizare a venitului unei firme cu trei activităţi care utilizează trei resurse:

$$\begin{cases}(\max) f = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 100 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 100 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 120 \\ x_j \ge 0 \quad j = 1,2,3\end{cases}$$

Se ştie că baza optimă B este formată din coloanele A^3 , A^1 , A^2 ale matricii tehnologice şi că:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

Dacă disponibilul actual al resursei R_3 – care trebuie consumată în întregime - **scade** cu o unitate atunci venitul maxim al firmei:

a) creşte cu $\frac{1}{10}$; b) creşte cu $\frac{1}{5}$; c) scade cu $\frac{1}{5}$; d) nu se modifică ; e) scade cu $\frac{1}{10}$.

11. Instrucțiunile algoritmului simplex dual sunt:

P ≡ Se pivotează tabelul simplex curent;
O ≡ Se cercetează dacă soluția dual admisibilă curentă are toate componentele nenegative;
I ≡ Se aplică criteriul de intrare în bază;
E ≡ Se aplică criteriul de ieşire din bază;
S ≡ Se cercetează dacă este verificată condiția de incompatibilitate de către programul care se rezolvă.

În ce ordine se aplică aceste instrucțiuni?

a) **O,E,I,S,P** ; b) **O,E,S,I,P** ; c) **O,S,E,I,P** ; d) **O,I,S,E,P** ; e) **O,I,E,S,P**

12. Folosind algoritmul simplex dual să se rezolve.

i) programul liniar c) din exercițiul 1;
ii) programul liniar din exercițiul 4;
iii) programul liniar din exercițiul 7.

(se va proceda ca în exemplul 5.8 din secțiunea 5.5).

Unitatea de învățare 6

ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ
Reoptimizare. Analiza sensitivității. Parametrizare

Cuprins

6.1 Introducere
6.2 Modificarea unor componente ale vectorului *c* al coeficienților funcției obiectiv
6.3 Modificarea unor componente ale vectorului *b* al termenilor liberi
6.4 Adăugarea unei restricții suplimentare
6.5 Analiza sensitivității
6.6 Programare parametrică

Probleme propuse

6.1 Introducere

Considerăm un program liniar în formă standard:

$$P \equiv P(A,b,c)\begin{cases}(\max) f = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0\end{cases}$$

El şi soluția sa optimă sunt perfect determinate de cunoaşterea masivelor A,b,c şi ca urmare va fi identificat în continuare prin sigla $P(A,b,c)$.
În numeroase aplicații practice, $P(A,b,c)$ modelează activitatea unui sistem de producție în cadrul căruia un număr de resurse sunt transformate în bunuri. În acest context elementele a_{ij} ale matricii tehnologice A au în general semnificații de consumuri unitare, componentele b_i ale vectorului b desemnează cantități disponibile de resurse iar componentele c_j ale vectorului c pot reprezenta prețuri sau profituri unitare.
Toate aceste mărimi numerice au fost presupuse până acum a fi constante. Nu puține sunt situațiile în care constantele programului $P(A,b,c)$ sunt fixate doar pe o anumită perioadă, ele suferind modificări de mai mică sau mai mare amploare prin trecerea la o nouă perioadă. În aceste situații suntem interesați în a cunoaşte efectul acestor modificări asupra soluției optime a programului original. Evident, acest efect poate fi măsurat rezolvând problema modificată de sine stătător.

În acest context, scopul reoptimizării este de a arăta cum se obține soluția problemei modificate plecând de la soluția optimă a problemei originale. Ne bazăm pe observația că la mici modificări ale datelor inițiale corespund schimbări de mică amploare în soluția optimă, schimbări ce se pot determina cu un efort de calcul relativ mic, oricum mai mic decât în cazul în care problema modificată ar fi rezolvată „ de la capăt”.

În cele ce urmează vom presupune că programului $P(A,b,c)$ i s-a aplicat algoritmul simplex rezutând concluzia că are optim finit. Fie B o bază optimă şi fie

$$x(B) = \begin{bmatrix} x^B = B^{-1}b \\ x^S = 0 \end{bmatrix}$$

soluția de bază asociată. Optimalitatea înseamnă:

- valorile variabilelor bazice sunt **nenegative**: $B^{-1}b \geq 0$;
- costurile reduse satisfac **criteriul de optimalitate** al algoritmului simplex:

$$\overline{c}_j = c^B B^{-1} A^j - c_j \geq 0 \quad , \quad j \in J$$

cu notațiile introduse în secțiunile anterioare.

Exemplul 6.1 Pentru ilustrări vom folosi programul:

$$(P)\begin{cases}(\max) f = 20x_1 + 16x_2 + 17x_3 \\ \quad x_1 + 2x_2 \qquad\quad \le 680 \\ 2x_1 + \ x_2 + 4x_3 \le 800 \\ 2x_1 + 2x_2 + \ x_3 \le 900 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0\end{cases}$$

Presupunem că (P) modelează activitatea unui sistem de producție care produce trei bunuri G_1, G_2, G_3 în cantitățile x_1, x_2, x_3 folosind trei resurse R_1, R_2, R_3 cu disponibilele limitate 680, 800 respectiv 900 unități. Bunurile sunt vândute la prețurile 20, 16 respectiv 17 unități monetare şi obiectivul urmărit este elaborarea unui program de producție care să maximizeze venitul total.
După introducerea variabilelor de abatere x_4, x_5, x_6 - cu semnificația de cantități neutilizate din resursele R_1, R_2 respectiv R_3 - şi aplicarea algoritmului simplex a rezultat tabelul:

			20	16	17	0	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	130	0	0	5/2	1	1	-3/2
20	x_1	350	1	0	7/2	0	1	-1/2
16	x_2	100	0	1	-3	0	-1	1
	f	8600	*	*	5	*	4	6

Tabelul 6.1

Din tabel extragem programul de activitate care maximizează venitul:

$x_1^* = 350$ unități din G_1 ; $x_2^* = 100$ unități din G_2 ; $x_3^* = 0$; venit maxim = 8600 u.m.

Valorile variabilelor de abatere:

$$x_4^* = 130 \quad ; \quad x_5^* = 0 \quad ; \quad x_6^* = 0$$

arată că resursele R_2 şi R_3 ar fi folosite integral în timp ce din R_1 ar rămâne 130 unități neutilizate.

6.2 Modificarea unor componente ale vectorului *c* al coeficienților funcției obiectiv

Problema originală

$$(P) \equiv P(A,b,c)\begin{cases}(\max) f = cx \\ Ax = b \\ x \ge 0\end{cases}$$

Problema modificată

$$(P') \equiv P(A,b,c')\begin{cases}(\max) f' = c'x \\ Ax = b \\ x \ge 0\end{cases}$$

unde $c' = (c'_1, c'_2, \cdots, c'_n)$ este vectorul noilor coeficienți ai funcției obiectiv.

Evident, **ambele programe au aceeaşi mulțime de soluții admisibile**; în particular soluția optimă $x(B)$ a programului original (P) este o soluție admisibilă de bază a programului modificat (P'). Pentru a testa optimalitatea soluției $x(B)$ în raport cu noua funcție obiectiv, recalculăm costurile reduse:

$$\bar{c}'_j = c'^B B^{-1} A^j - c'_j \geq 0 \quad , \quad j \in J$$

Două situații sunt posibile:

-noile costuri reduse satisfac criteriul de optimalitate al algoritmului simplex: $\bar{c}'_j \geq 0$, $j \in J$. Atunci soluția $x(B)$ este soluție optimă şi pentru programul modificat (P');

-noile costuri reduse nu satisfac criteriul de optimalitate: unul sau mai multe dintre ele sunt < 0. În acest caz, rezolvarea programului (P') se va face cu algoritmul simplex primal luând $x(B)$ ca soluție de start.

Exemplul 6.2 În problema de optimizare din exemplul 6.1 profiturile unitare rezultate din vânzarea bunurilor sunt 4, 3 respectiv 6 u.m. Suntem interesați în a determina programul de producție care maximizează profitul total.Vom realiza acest lucru schimbând în (P) funcția obiectiv „venit”≡ $f = 20x_1 + 16x_2 + 17x_3$ cu funcția „profit”≡ $f' = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$ şi rezolvând noul program de sine stătător. Deoarece maximizarea profitului şi maximizarea venitului sunt obiective „neantagoniste”, este firesc să credem că soluția unuia s-ar obține mai uşor dacă se pleacă de la soluția celuilalt. În cazul de față recalculăm costurile reduse – evaluate în tabelul 6.1 în raport cu funcția „venit” - folosind coeficienții funcției „profit”. Vezi tabelul 6.2, din care rezultă că soluția care maximizează venitul nu maximizează şi profitul. Totuşi o singură iterație este suficientă pentru obținerea rezultatului dorit – vezi tabelul 6.3

			4	3	6	0	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	130	0	0	$\boxed{5/2}$	1	1	-3/2
4	x_1	350	1	0	7/2	0	1	-1/2
3	x_2	100	0	1	-3	0	-1	1
	f'	1700	*	*	-1	*	1	1
6	x_3	52	0	0	1	2/5	2/5	-3/5
4	x_1	168	1	0	0	-7/5	-2/5	8/5
3	x_2	256	0	1	0	6/5	1/5	-4/5
	f'	1752	*	*	*	2/5	7/5	2/5

Tabelele 6.2-6.3

Programul de activitate care maximizează profitul propune realizarea următoarelor cantități:

$x_1^{**} = 168$ unități din G1; $x_2^{**} = 256$ unități din G2; $x_3^{**} = 52$ unități din G3; profit maxim = 1752 u.m.

folosind integral toate resursele deoarece $x_4^{**} = x_5^{**} = x_6^{**} = 0$.S-ar obține un venit de

$$20 \cdot 168 + 16 \cdot 256 + 17 \cdot 52 = 8340 \text{ u.m.}$$

reprezentând 97.9% din maximul posibil de 8600 u.m.

Față de soluția care maximizează venitul, soluția care maximizează profitul are câteva calități:

- produce toate bunurile;
- utilizează toate resursele;
- venitul scade foarte puțin (cu numai 2.1%) în schimb rata profitului este superioară: 21% față de 19.8%.

6.3 Modificarea unor componente ale vectorului *b* al termenilor liberi

Problema originală	Problema modificată
$(P) \equiv P(A,b,c)\begin{cases}(\max) f = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0\end{cases}$	$(P') \equiv P(A,b',c)\begin{cases}(\max) f = cx \\ Ax = b' \\ x \geq 0\end{cases}$

în care $b' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix}$ este vectorul noilor termeni liberi ai restricțiilor.

De această dată, programele (P) şi (P') au mulțimi de soluții admisibile **diferite**. În schimb, având aceeaşi matrice tehnologică şi aceeaşi funcție obiectiv, **au aceleaşi baze dual admisibile**!
Începem prin a determina soluția $x'(B)$ a programului modificat (P') asociată bazei B:

$$x'(B) = \begin{bmatrix} x'^B = B^{-1}b' \\ x'^S = 0 \end{bmatrix}$$

Avem nevoie de inversa B^{-1} a bazei B, inversă care se extrage din tabelul simplex optim asociat bazei B – vezi secțiunea 4.3 din unitatea de învățare 4!
Deoarece B este o bază optimă pentru programul original (P) şi costurile reduse $\overline{c}_j = c^B B^{-1} A^j - c_j$ nu s-au modificat, urmează că $x'(B)$ este o soluție dual admisibilă pentru programul modificat (P'). Două situații sunt posibile:

- $x'^B = B^{-1}b' \geq 0$. Atunci $x'(B)$ este soluția optimă a programului modificat (P');
- $x'^B = B^{-1}b'$ are şi componente **negative**. În acest caz, rezolvarea programului (P') se va face cu algoritmul simplex **dual** luând $x'(B)$ ca soluție de start.

Exemplul 6.3 Presupunem că în programul (P) din exemplul 6.1 au survenit următoarele modificări:

- disponibilul din R_1 s-a dublat;
- disponibilul din R_2 a crescut cu 40%;
- disponibilul din R_3 a crescut cu o treime.

Se cere determinarea prin **reoptimizare** a soluției care maximizează venitul în noile condiții.

Vom înlocui în (P) vectorul termenilor liberi

$$b=\begin{bmatrix}680\\800\\900\end{bmatrix} \text{ cu } b'=\begin{bmatrix}2\cdot 680=1360\\800+320=1120\\900+300=1200\end{bmatrix}$$

Calculăm soluția problemei modificate asociate bazei optimale $B=\begin{bmatrix}A^4 & A^1 & A^2\end{bmatrix}$ din problema originală.Din tabelul 6.1 extragem

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}\overline{A}^4 & \overline{A}^5 & \overline{A}^6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -3/2\\0 & 1 & -1/2\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

(cititorul atent va recunoaşte în A^4, A^5, A^6 coloanele bazei unitare de start!)

$$x'^B=\begin{bmatrix}x_4\\x_1\\x_2\end{bmatrix}=B^{-1}b'=\begin{bmatrix}1 & 1 & -3/2\\0 & 1 & -1/2\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1360\\1120\\1200\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}680\\520\\80\end{bmatrix}$$

Deoarece $x'^B \geq 0$ baza $B=\begin{bmatrix}A^4 & A^1 & A^2\end{bmatrix}$ este optimă şi pentru problema modificată. Soluția optimă a problemei modificate are componentele:

$x_1'=520$ unități din G_1 ; $x_2'=80$ unități din G_2 ; $x_3'=0$; venit maxim=11680 u.m.

Valorile variabilelor de abatere: $x_4'=680$ unități din R_1 neutilizate; $x_5'=0$; $x_6'=0$

Exemplul 6.4 Cum se modifică soluția optimă a programului original (P) din exemplul 6.1 dacă:
- disponibilul resursei R_1 se reduce la 550 unități;
- disponibilul resursei R_2 rămâne neschimbat;
- disponibilul resursei R_3 se reduce la 710 unități.

(Atenție: soluția optimă a problemei modificate se va determina prin **reoptimizare** şi nu prin reluarea rezolvării „de la capăt"!)

Procedăm ca în exemplul precedent. Înlocuim în (P):

$$b=\begin{bmatrix}680\\800\\900\end{bmatrix} \quad \text{cu} \quad b'=\begin{bmatrix}550\\800\\710\end{bmatrix}$$

după care calculăm soluția problemei modificate asociată bazei optime $B=\begin{bmatrix}A^4 & A^1 & A^2\end{bmatrix}$ a programului original.

$$x'^{B} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 550 \\ 800 \\ 710 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 285 \\ 445 \\ -90 \end{bmatrix}$$

De această dată, baza $B = \begin{bmatrix} A^4 & A^1 & A^2 \end{bmatrix}$ este doar o bază dual admisibilă pentru problema modificată astfel că pentru rezolvarea ei se va aplica algoritmul simplex dual – vezi tabelele 6.4 şi 6.5. Tabelul 6.4 rezultă din tabelul 6.1 – tabelul simplex optim al problemei originale – prin introducerea lui x'^{B} calculat mai sus în coloana VVB şi recalcularea valorii funcţiei obiectiv în noua soluţie.

			20	16	17	0	0	0	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	285	0	0	5/2	1	1	-3/2	Vezi instrucţiunile algoritmului simplex dual!
20	x_1	445	1	0	7/2	0	1	-1/2	Iese din bază A^2
16	x_2	-90	0	1	$\boxed{-3}$	0	-1	1	Deoarece $\min\left\{\left\lvert\frac{5}{-3}\right\rvert, \left\lvert\frac{4}{-1}\right\rvert\right\} = \frac{5}{3}$ intră în bază A^3
	f	7460	*	*	5	*	4	6	
0	x_4	210	0	5/6	0	1	1/6	-2/3	
20	x_1	340	1	7/6	0	0	-1/6	2/3	Soluţia curentă este simultan primal şi dual
17	x_3	30	0	-1/3	1	0	1/3	-1/3	admisibilă deci este optimă!
	f	7310	*	5/3	*	*	7/3	23/3	

Tabelele 6.4 şi 6.5

A rezultat următorul program optim de activitate:
$x_1'' = 340$ unităţi din G_1; $x_2'' = 0$; $x_3'' = 30$ unităţi din G_3; venit maxim = 7310 u.m.
Valorile variabilelor de abatere: $x_4'' = 210$ unităţi din resursa R_1 rămân neutilizate; $x_5'' = 0$, $x_6'' = 0$.

6.4 Adăugarea unei restricţii suplimentare

Programul original

$$(P)\begin{cases} (\max) f = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Programul extins

$$(P')\begin{cases} (\max) f = cx \\ Ax = b \\ lx \leq \beta \Leftrightarrow l_1x_1 + \cdots + l_nx_n \leq \beta \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Evident, soluţiile admisibile ale programului extins (P') se regăsesc printre soluţiile admisibile ale programului original (P). Sunt posibile două situaţii:

- soluţia optimă $x(B)$ a programului (P) satisface restricţia suplimentară. Graţie observaţiei precedente, $x(B)$ este soluţie optimă şi pentru programul (P').
- soluţia $x(B)$ nu verifică restricţia adăugată. În acest caz vom face următoarele operaţii:

1) Transformăm restricția suplimentară în egalitate introducând variabila de abatere x_{n+1}:

$$l_1 x_1 + \cdots + l_n x_n + x_{n+1} = \beta$$

2) Eliminăm eventualele variabile bazice care ar putea apare în membrul stâng. Pentru aceasta se va folosi forma explicită (P_B) a programului (P) în raport cu baza B din care se obțin variabilele bazice în funcție de cele nebazice. Coeficienții formei explicite (P_B) apar în tabelul simplex (T_B) asociat bazei B – baza optimă a programului original. Obținem o relație de forma:

$$x_{n+1} + \sum_{j \in J} \bar{l}_j x_j = \bar{\beta} \qquad (*)$$

Cu siguranță $\bar{\beta} < 0$ deoarece soluția optimă a programului original nu verifică restricția adăugată!

3) Soluția $x' = \begin{bmatrix} x(B) \\ x_{n+1} = \bar{\beta} \end{bmatrix}$.se dovedeşte (uşor) a fi o soluție dual admisibilă a problemei extinse (P'). Se completează tabelul simplex optim (T_B) al problemei originale cu o nouă linie în care apar coeficienții din (*) şi se aplică algoritmul simplex dual.

Exemplul 6.5 Reluăm problema maximizării venitului din exemplul 6.1.Se constată că soluția optimă nu prevede producerea bunului G_3. Ne propunem să determinăm prin reoptimizare cea mai bună soluție ce satisface cerința ca din bunul G_3 să se producă cel puțin 40 unități.
Adăugăm restricția $x_3 \geq 40$, evident neverificată de către soluția optimă a problemei originale. Înmulțim relația cu -1 transformând-o într-o inegalitate de tip $\leq$ (ca în expozeul teoretic!) după care introducem variabila de abatere x_7:

$$x_3 \geq 40 \quad \Rightarrow \quad -x_3 \leq -40 \quad \Rightarrow \quad -x_3 + x_7 = -40 \qquad (*)$$

În egalitatea obținută nu apar variabilele bazice x_4, x_1, x_2 din soluția optimă a problemei originale. Drept care coeficienții relației (*) se adaugă la tabelul simplex optim al problemei originale (tabelul 6.1) şi în continuare se aplică algoritmul simplex dual.

			20	16	17	0	0	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	130	0	0	5/2	1	1	-3/2	0
20	x_1	350	1	0	7/2	0	1	-1/2	0
16	x_2	100	0	1	-3	0	-1	1	0
0	x_7	-40	0	0	$\boxed{-1}$	0	0	0	1
	f	8600	*	*	5	*	4	6	*
0	x_4	30	0	0	0	1	1	-3/2	5/2
20	x_1	210	1	0	0	0	1	-1/2	7/2
16	x_2	220	0	1	0	0	-1	1	-3
17	x_3	40	0	0	1	0	0	0	-1
	f	8400	*	*	*	*	4	6	5

Tabelele 6.6 şi 6.7

S-a obținut soluția:

$$x_1^{**} = 210 \quad x_2^{**} = 220 \quad x_3^{**} = 40 \quad (\max) f = 8400$$
$$x_4^{**} = 30 \quad x_5^{**} = x_6^{**} = x_7^{**} = 0$$

După cum se vede producerea bunului G_3 diminuează venitul (de la 8600 u.m. la 8400 u.m.) dar asigură o mai bună folosire a resursei R_1: ar rămîne neutilizate numai 30 u. față de 130 u. nefolosite în soluția inițială! Ne putem întreba care este cantitatea maximă din G_3 ce ar trebui produsă pentru a asigura consumarea integrală a resursei R_1.
Răspunsul este foarte uşor de dat: în considerațiile precedente înlocuim inegalitatea $x_3 \geq 40$ cu $x_3 \geq \delta$ unde $\delta > 0$.Linia care se adaugă la tabelul simplex optim al problemei originale devine $-x_3 + x_7 = -\delta$. O iterație a algoritmului simplex dual conduce la soluția:

$$\begin{cases} x_4 = 130 - \dfrac{5}{2}\delta \\ x_1 = 350 - \dfrac{7}{2}\delta \\ x_2 = 100 + 3\delta \\ x_3 = \delta \end{cases} \qquad x_j = 0 \text{ în rest.}$$

Din condiția de nenegativitate $x_j \geq 0$ ar rezulta că pentru $\delta = 52$ am avea $x_4 = 0$ adică şi resursa R_1 ar fi integral folosită. Regăsim soluția care maximiza profitul din exemplul 6.2.

Exemplul 6.6 Examinând soluția optimă a problemei din exemplul 6.4 s-a decis limitarea producției bunului G_1 la cel mult 270 u. Cum va arăta programul optim de activitate care maximizează venitul?
Reamintim că în exemplul 6.4 s-a rezolvat programul liniar:

$$\begin{cases} (\max) f = 20x_1 + 16x_2 + 17x_3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 550 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 800 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 710 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

rezultat din programul original din exemplul 6.1 prin modificarea termenilor liberi ai resticțiilor. Prin reoptimizare s-a găsit soluția optimă (vezi tabelul simplex 6.5):

$$x_1 = 340 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 30 \quad (\max) f = 7310$$
Valorile variabilelor de abatere: $x_4 = 210 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 0$

Evident, această soluție nu satisface cerința de limitare a producției bunului G_1.

Adăugăm restricția suplimentară $x_1 \leq 270$. Transformăm inegalitatea în egalitate introducând variabila de abatere x_7:

$$x_1 + x_7 = 270 \qquad (*)$$

Spre deosebire de situația analizată în exemplul 6.5 în relația (*) apare variabila x_1 care este o variabilă bazică în soluția optimă de mai sus! Pentru eliminarea ei, din tabelul simplex optim 6.5 extragem relația:

$$x_1 + \frac{7}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_5 + \frac{2}{3}x_6 = 340 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 340 - \frac{7}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_5 - \frac{2}{3}x_6$$

Înlocuind în (*) obținem egalitatea:

$$-\frac{7}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_5 - \frac{2}{3}x_6 + x_7 = -70 \qquad (**)$$

Completăm tabelul simplex 6.5 cu o nouă linie în care apar coeficienții relației (**) și aplicăm algoritmul simplex dual.

			20	16	17	0	0	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	210	0	5/6	0	1	1/6	-2/3	0
20	x_1	340	1	7/6	0	0	-1/6	2/3	0
17	x_3	30	0	-1/3	1	0	1/3	-1/3	0
0	x_7	-70	0	$\boxed{-7/6}$	0	0	1/6	-2/3	1
	f	7310	*	5/3	*	*	7/3	23/3	*
0	x_4	160	0	0	0	1	2/7	-8/7	5/7
20	x_1	270	1	0	0	0	0	0	1
17	x_3	50	0	0	1	0	2/7	-1/7	-2/7
16	x_2	60	0	1	0	0	-1/7	4/7	-6/7
	f	7210	*	*	*	*	18/7	47/7	10/7

Tabelele 6.8 și 6.9

Într-o singură iterație a rezultat soluția optimă:

$$x_1^{**} = 270 \quad x_2^{**} = 60 \quad x_3^{**} = 50 \quad (\max) f = 7210$$
$$x_4^{**} = 160 \quad x_5^{**} = x_6^{**} = x_7^{**} = 0$$

6.5 Analiza sensitivității

Reluăm programul liniar general $P(A,b,c)$ din secțiunea 6.1. Este posibil ca anumite constante ale modelului să nu fie cunoscute cu exactitate, ele oscilând în jurul unor valori „probabile”.În asemenea situații suntem interesați să știm dacă la **variații mici** ale acestor constante corespund **variații mici** ale soluției modelului altfel spus vrem să știm dacă soluția modelului depinde **continuu** de aceste constante.Dacă este așa vom spune că soluția modelului este **stabilă** (în raport cu constantele considerate).

Studiul stabilității este important pentru că pot exista situații în care variații mici ale unor constante antrenează modificări majore în soluția optimă şi în acest caz este necesar să ştim cauzele şi proporțiile instabilității pentru a putea lua deciziile adecvate!

În acest context **analiza sensitivității** are ca obiect studiul stabilității soluției optime a unei probleme de optimizare.În cazul liniar, pentru fiecare constantă a modelului se poate determina un interval de variație cu proprietatea că baza optimală sau chiar soluția optimă nu se modifică! Acest interval se numeşte **intervalul de stabilitate** al soluției optime în raport cu coeficientul considerat.
În continuare vom avea în vedere determinarea intervalelor de stabilitate ale soluției optime a programului liniar *P*(*A*,*b*,*c*) în raport cu coeficienții funcției obiectiv şi în raport cu termenii liberi ai restricțiilor.

Considerăm următoarea situație de referință. Un agent economic are la dispoziție trei resurse.

R_1= forță de muncă = 1000 om.ore;
R_2 = capacități de producție = 1800 ore de funcționare;
R_3 = materii prime = 1860 unități valorice.

El produce două bunuri G_1 şi G_2 la prețurile 12 repectiv 15 unități monetare. Pentru o unitate din G_1 sunt necesare 2u. din R_1, 3u. din R_2 şi 4u. din R_3. Pentru o unitate din bunul G_2 se consumă 5u. din R_1, 2u. din R_2 şi 3u. din R_3.
Determinarea programului de activitate care maximizează venitul agentului este modelată prin programul liniar:

$$\begin{cases} (\max) f = 12x_1 + 15x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 1000 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 1800 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 1860 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

în care x_1, x_2 reprezintă cantitățile din bunurile G_1,G_2 ce pot fi produse din resursele date.
Introducând variabilele de abatere x_3, x_4, x_5 cu semnificația de resurse neutilizate obținem programul liniar în formă standard:

$$\begin{cases} (\max) f = 12x_1 + 15x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1000 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 1800 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_5 = 1860 \\ x_1, \ldots, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Pornind cu baza unitară $\left[A^3, A^4, A^5\right]$ în două iterații se obține tabelul simplex optim.

			12	15	0	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
15	x_2	20	0	1	2/7	0	-1/7
0	x_4	410	0	0	1/14	1	-11/14
12	x_1	450	1	0	-3/14	0	5/14
	f	5700	*	*	12/7	*	15/7

Tabelul 6.10

Soluția optimă:

$$x_1^* = 450 \quad x_2^* = 20 \quad (\max) f = 5700$$

Valorile variabilelor de abatere: $x_3^* = 0 \quad x_4^* = 410 \quad x_5^* = 0$

Interpretare: Venitul maxim posibil de obținut din resursele date este de 5700 u.m. dacă se produc 450 u. din bunul G_1 şi 20 u. din G_2. Acest program de activitate ar utiliza integral resursele R_1 (forță de muncă) şi R_3 (materii prime) şi parțial resursa R_2 (capacități de producție) din care rămîn nefolosite 410 u.

Exemplul 6.7 Între ce limite poate varia prețul bunului G_1astfel încât structura optimă a programului de activitate descrisă mai sus să nu se modifice?

Deoarece o modificare în coeficienții funcției obiectiv nu are nici un efect asupra unei baze şi nici asupra soluției asociate chestiunea pusă se reformulează astfel: între ce limite poate varia prețul bunului G_1 astfel încât baza $\left[A^2, A^4, A^1\right]$să rămână optimă.

Pentru răspuns, în tabelul simplex 6.10, recalculăm costurile reduse aferente variabilelor nebazice x_3 şi x_5 înlocuind prețul „constant” 12 al bunului G_1 cu prețul „variabil” c_1.

$$\bar{c}_3 (= c^B B^{-1} A^3 - c_3 = c^B \overline{A}^3 - c_3) = [15\ ,\ 0\ ,\ c_1] \cdot \begin{bmatrix} 2/7 \\ 1/14 \\ -3/14 \end{bmatrix} - 0 = \frac{30}{7} - \frac{3}{14} c_1$$

$$\bar{c}_5 (= c^B B^{-1} A^5 - c_5 = c^B \overline{A}^5 - c_5) = [15\ ,\ 0\ ,\ c_1] \cdot \begin{bmatrix} -1/7 \\ -11/14 \\ 5/14 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{15}{7} + \frac{5}{14} c_1$$

$$\text{Valoarea funcției obiectiv: } f = [15 \quad 0 \quad c_1] \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 410 \\ 450 \end{bmatrix} = 300 + 450 c_1$$

Condiția de optim $\bar{c}_3 \ge 0, \bar{c}_5 \ge 0$ se verifică pentru $c_1 \in [6\ ,20]$. În concluzie: dacă prețul bunului G_1 se află în intervalul $[6\ ,20]$ agentul va avea cel mai mare venit dacă – din resursele specificate – va produce 450 u. din G_1 şi 20 u. din G_2. Venitul corespunzător va fi de 300 +450· c_1 u.m.

Pentru prețul bunului G_2 intervalul de stabilitate este $[9\,,30]$.
Deoarece prețurile actuale ale celor două bunuri se află **în interiorul** intervalelor de stabilitate calculate tragem concluzia că soluția optimă analizată este stabilă în sensul că nu se modifică la oscilații „mici" ale celor două prețuri.

Exemplul 6.8 Între ce limite poate varia disponibilul resursei R_1= forța de muncă astfel încât structura optimă stabilită să nu se schimbe?

De această dată o modificare oricât de mică în vectorul termenilor liberi antrenează modificări ale componentelor soluției optime astfel că „menținerea structurii optime actuale" înseamnă doar menținerea optimalității bazei actuale $\left[A^2, A^4, A^1\right]$.
Înlocuim valoarea constantă 1000 a disponibilului actual al resursei R_1 cu mărimea „variabilă" b_1 și recalculăm soluția asociată bazei $\left[A^2, A^4, A^1\right]$:

$$x^B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2/7 & 0 & -1/7 \\ 1/14 & 1 & -11/14 \\ -3/14 & 0 & 5/14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 1800 \\ 1860 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7\,b_1 - 1860/7 \\ 1/14\,b_1 + 4740/14 \\ -3/14\,b_1 + 9300/14 \end{bmatrix}$$

Condiția de optimalitate $x^B \geq 0$ conduce la intervalul de stabilitate $930 \leq b_1 \leq 3100$.
În concluzie cât timp disponibilul resursei R_1 se află în intervalul $[930\,,3100]$ programul care maximizează venitul agentului este:

$$x_1^* = -3/14\,b_1 + 9300/14 \qquad x_2^* = 2/7\,b_1 - 1860/7 \qquad \text{cu venitul } f = 12/7\,b_1 + 27900/7$$

Intervalul de stabilitate al soluției optime actuale în raport cu disponibilul resursei R_2 este $[1390\,,+\infty)$.Programul optim $x_1 = 450 \quad x_2 = 20$ nu depinde de b_2 , astfel că limita 1390 reprezintă necesarul minim din R_2 pentru susținerea acestui program!
În raport cu disponibilul resursei R_3 soluția optimă actuală are intervalul de stabilitate $[600\,,2000]$
Deoarece valorile actuale ale disponibilelor celor trei resurse se află **în interiorul** intervalelor de stabilitate calculate se poate trage concluzia că producerea ambelor bunuri G_1 și G_2 în cantitățile 450 u. respectiv 20 u. este o **soluție optimă stabilă** (este robustă, merită încredere) în sensul că mici oscilații ale disponibilelor în jurul valorilor actuale **nu modifică opțiunea de a fabrica ambele bunuri** ci numai cantitățile în care acestea vor fi produse!

6.6 Programare parametrică

Programarea parametrică are ca obiect studiul programelor liniare în care o parte din coeficienții structurali depind de unul sau mai mulți parametri. Cazurile mai interesante în aplicații vizează dependența liniară, de un singur parametru, fie a coeficienților c_j din funcția obiectiv fie a termenilor liberi b_i ai restricțiilor. Intervalul valorilor admisibile ale parametrului este divizat în mai multe subintervale, pe fiecare subinterval programul parametric având o anumită bază optimă.

Exemplul 6.9 Vom studia programul parametric $P = (P_\theta) \quad \theta \in R$:

$$(P_\theta)\begin{cases}(\max) f = (2+3\theta)x_1 + (3+2\theta)x_2 + (5+\theta)x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 13 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \le 5 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0\end{cases}$$

în care coeficienții funcției obiectiv depind liniar de un parametru. (P) este de fapt o familie de programe liniare uzuale, fiecare aflându-se într-una din situațiile:

- are optim finit;
- are optim infinit;
- este incompatibil.

Obiectivul studiului este de a stabili în care din cele trei situații se află fiecare program P_θ din familia (P).
Vom lucra cu forma standard notată prin abuz tot cu P_θ:

$$(P_\theta)\begin{cases}(\max) f = (2+3\theta)x_1 + (3+2\theta)x_2 + (5+\theta)x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \quad = 13 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \quad - x_5 = 5 \\ x_1, \ldots, x_5 \ge 0\end{cases}$$

Ne propunem să găsim (măcar) o valoare particulară a parametrului θ pentru care programul corespunzător are o bază optimă.
Având aceeaşi matrice tehnologică, programele P_θ , $\theta \in R$ au aceleaşi baze. Soluțiile asociate nu depind de θ şi ca urmare ele sunt fie (primal) admisibile fie neadmisibile pentru toate programele familiei P. Ce depinde de θ este calitatea unei baze de a fi dual admisibilă: o bază particulară poate să fie dual admisibilă pentru unul sau mai multe programe P_θ în timp ce pentru celelalte nu.
Drept care, vom identifica rapid o bază oarecare fără a impune satisfacerea admisibilității primale sau duale.

Punând sistemul restricțiilor în forma echivalentă:

$$\begin{cases} -x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 13 \\ 7x_2 + 5x_3 + x_5 = 34 \end{cases}$$

rezultă că $\left[A^4, A^1, A^5\right]$ este realmente o bază a programului P_θ. Soluția asociată:

$$x_1 = 13 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = -6 \quad x_5 = 34$$

nu este admisibilă, dar ar putea fi dual admisibilă pentru anumite valori ale lui θ, ceeace ne-ar permite aplicarea algoritmului simplex dual în căutarea unei baze optime! Din tabelul simplex asociat bazei $\left[A^4, A^1, A^5\right]$:

			2+3θ	3+2θ	5+θ	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-6	0	-1	$\boxed{-1}$	1	0
2+3θ	x_1	13	1	2	2	0	0
0	x_5	34	0	7	5	0	1
	f	26+39θ	*	1+4θ	-1+5θ	*	*

Tabelul 6.12

rezultă că această bază este dual admisibilă dacă:

$$\begin{cases} \bar{c}_2 = 1 + 4\theta \geq 0 \\ \bar{c}_3 = -1 + 5\theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad -\frac{1}{4} \leq \theta \leq \frac{1}{5}$$

Fixăm un θ în intervalul $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right]$ şi aplicăm instrucțiunile algoritmului simplex dual bazei $\left[A^4, A^1, A^5\right]$:

- iese din bază coloana A^4;
- evaluăm: $\min\left\{\left|\frac{1+4\theta}{-1}\right|, \left|\frac{-1+5\theta}{-1}\right|\right\} = \min\{1 + 4\theta, -1 + 5\theta\} = -1 + 5\theta \quad \Rightarrow$ intră în bază A^3.

Prin pivotare se obține tabelul 6.13 asociat bazei admisibile $\left[A^3, A^1, A^5\right]$

			$2+3\theta$	$3+2\theta$	$5+\theta$	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$5+\theta$	x_3	6	0	1	1	-1	0
$2+3\theta$	x_1	1	1	0	0	2	0
0	x_5	4	0	$\boxed{2}$	0	5	1
	f	$32+9\theta$	*	$2-\theta$	*	$-1+5\theta$	*

Tabelul 6.13

Această bază este dual admisibilă şi în consecinţă optimă dacă:

$$\begin{cases} 2-\theta \geq 0 \\ -1+5\theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{5} \leq \theta \leq 2$$

I) Astfel, **am găsit o primă bază care este optimă pentru toate programele P_θ cu $\theta \in [1/5 \ , \ 2]$.**

Presupunem în continuare că $\theta < 1/5$ şi „foarte aproape” de 1/5.Baza admisibilă $\left[A^3, A^1, A^5\right]$ nu mai satisface criteriul de optimalitate deoarece $\bar{c}_4 = -1+5\theta < 0$. De această dată aplicăm instrucţiunile algoritmului simplex primal:

- coloana A^4 întră în baza curentă în locul coloanei A^1.

Operaţia de pivotare (cu pivotul marcat cu linie punctată) conduce la tabelul simplex 6.14 asociat unei alte baze admisibile $\left[A^3, A^4, A^5\right]$

			$2+3\theta$	$3+2\theta$	$5+\theta$	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$5+\theta$	x_3	13/2	1/2	1	1	0	0
0	x_4	1/2	1/2	0	0	1	0
0	x_5	3/2	-5/2	2	0	0	1
	f	$65/2 +(13/2)\theta$	$1/2 - (5/2)\theta$	$2-\theta$	*	*	*

Tabelul 6.14

Determinăm valorile parametrului $\theta < 1/5$ pentru care această nouă bază este dual admisibilă:

$$\begin{cases} \bar{c}_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\theta \geq 0 \\ \bar{c}_2 = 2-\theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \theta \leq \frac{1}{5}$$

II) În concluzie, **baza** $\left[A^3, A^4, A^5\right]$ **este optimă pentru toate programele P_θ cu $\theta \in (-\infty \ , \ 1/5]$.**

Ne întoarcem la tabelul simplex 6.13 şi presupunem $\theta > 2$ şi „foarte aproape" de 2. Din nou baza $\left[A^3, A^1, A^5\right]$ nu mai este optimă dar, de această dată, pentru că $\overline{c}_2 = 2 - \theta < 0$. Introducând în bază coloana A^2 în locul coloanei A^5 se obține prin pivotare (cu pivotul marcat cu linie groasă) tabelul simplex 6.15 asociat bazei admisibile $\left[A^3, A^1, A^2\right]$.

			2+3θ	3+2θ	5+θ	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5+θ	x_3	4	0	0	1	-7/2	-1/2
2+3θ	x_1	1	1	0	0	2	0
3+2θ	x_2	2	0	1	0	5/2	1/2
	f	28+11θ	*	*	*	-6+(15/2)θ	-1+(1/2)θ

Tabelul 6.15

Deoarece:

$$\begin{cases} \overline{c}_4 = -6 + \dfrac{15}{2}\theta \geq 0 \\ \overline{c}_5 = -1 + \dfrac{1}{2}\theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \theta \geq 2$$

III) Conchidem că **baza** $\left[A^3, A^1, A^2\right]$ **este optimă pentru toate programele P_θ cu $\theta \in [2\ ,\ +\infty)$**
Diagrama din figura 6.1 sintetizează rezultatele studiului:

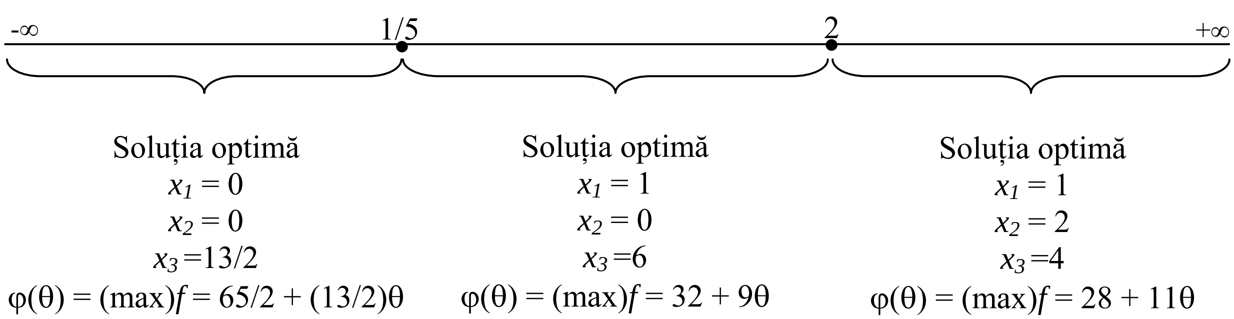


Figura 6.1

În figura 6.2 este redată variația valorii maxime $\varphi(\theta)$ a funcției obiectiv f în raport cu parametrul θ.

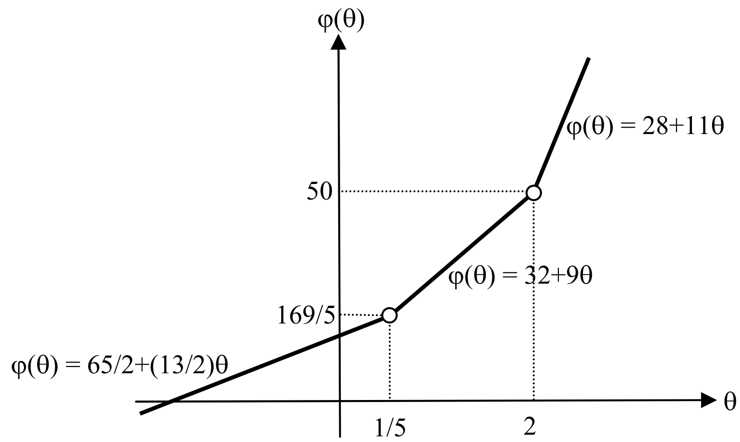


Figura 6.2

Exemplul 6.10 Vom rezolva programul parametric $P = (P_\theta) \quad \theta \in R$:

$$(P_\theta)\begin{cases}(\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 \le \ 7 + 2\theta \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 13 + \ \theta \\ 3x_1 - \ x_2 + \ x_3 \le \ 5 + 2\theta \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0\end{cases}$$

în care termenii liberi ai restricțiilor depind liniar de un parametru.
Bineînțeles că vom lucra tot cu forma standard:

$$(P_\theta)\begin{cases}(\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + x_4 \qquad = \ 7 + 2\theta \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad\qquad = 13 + \ \theta \\ 3x_1 - \ x_2 + \ x_3 \qquad - x_5 = \ 5 + 2\theta \\ x_1, \ldots, x_5 \ge 0\end{cases}$$

Ca şi în exemplul precedent programele P_θ au aceeaşi matrice tehnologică şi în consecință au aceleaşi baze. Costurile reduse aferente unei baze nu depind de parametrul θ şi ca urmare o bază oarecare este sau nu este dual admisibilă pentru toate programele P_θ. În schimb componentele soluției asociate unei

baze depind de θ şi în consecință o bază oarecare poate să fie (primal) admisibilă pentru anumite programe P_θ şi să nu aibe această calitate pentru celelalte.
Ca şi în exemplul precedent vom pleca de la o bază absolut oarecare singura „pretenție" fiind aceea de a fi uşor de obținut. Rescriind sistemul restricțiilor în forma echivalentă:

$$\begin{cases} -x_2 - x_3 + x_4 = -6+\theta \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 13+\theta \\ 7x_2 + 5x_3 + x_5 = 34+\theta \end{cases}$$

conchidem că submatricea formată din coloanele A^4, A^1, A^5 este o bază a cărei soluție asociată are componentele:

$$x_1 = 13+\theta \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = -6+\theta \quad x_5 = 34+\theta$$

Tabelul simplex asociat bazei $\left[A^4, A^1, A^5\right]$:

			2	3	5	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-6+θ	0	-1	-1	1	0
2	x_1	13+θ	1	2	2	0	0
0	x_5	34+θ	0	7	$\boxed{5}$	0	1
	f	26+2θ	*	1	-1	*	*

Tabelul 6.16

arată că soluția de bază considerată nu satisface criteriul de optimalitate al algoritmului simplex dar ar putea fi (primal) admisibilă pentru anumite valori ale lui θ şi astfel o bază optimă ar putea fi obținută prin aplicarea algoritmului simplex primal! Impunând condiția de admisibilitate rezultă:

$$\begin{cases} -6+\theta \geq 0 \\ 13+\theta \geq 0 \\ 34+\theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \theta \geq 6$$

Fixăm un θ în intervalul [6 , +∞) şi aplicăm bazei $\left[A^4, A^1, A^5\right]$ instrucțiunile algoritmului simplex primal:

- intră în bază coloana A^3;
- evaluăm $\min\left\{\frac{13+\theta}{2}, \frac{34+\theta}{5}\right\} = \frac{34+\theta}{5} \quad \Rightarrow$ coloana A^5 părăseşte baza curentă.

Pivotarea tabelului 6.16 cu pivotul marcat conduce la tabelul simplex 6.17 asociat bazei $\left[A^4, A^1, A^3\right]$

			2	3	5	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	4/5+(6/5)θ	0	2/5	0	1	1/5
2	x_1	-3/5+(3/5)θ	1	-4/5	0	0	$\boxed{-2/5}$
5	x_3	34/5+(1/5)θ	0	7/5	1	0	1/5
	f	164/5+(11/5)θ	∗	12/5	∗	∗	1/5

Tabelul 6.17

Baza obținută este primal admisibilă dacă:

$$\begin{cases} \frac{4}{5}+\frac{6}{5}\theta \geq 0 \\ -\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\theta \geq 0 \\ \frac{34}{5}+\frac{1}{5}\theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \theta \geq 1$$

I) În concluzie, **baza** $\left[A^4, A^1, A^3\right]$ **este optimă pentru toate programele P_θ cu θ ∈ [1 , +∞).**

Pentru θ < 1 dar „foarte aproape de 1”, baza $\left[A^4, A^1, A^3\right]$ nu mai este admisibilă deoarece $\overline{b}_1 = -\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\theta < 0$ dar rămâne dual admisibilă – vezi tabelul 6.17! Aplicăm instrucțiunile algoritmului simplex dual:

- iese din baza curentă coloana A^1;
- $\min\left\{\left|\frac{12/5}{-4/5}\right|, \left|\frac{1/5}{-2/5}\right|\right\} = \min\left\{3, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ intră în bază coloana A^5.

Pivotarea tabelului 6.17 cu pivotul marcat conduce la tabelul simplex 6.18 asociat bazei $\left[A^4, A^5, A^3\right]$.

			2	3	5	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	1/2+(3/2)θ	1/2	0	0	1	0
0	x_5	3/2-(3/2)θ	-5/2	2	0	0	1
5	x_3	13/2+(1/2)θ	1/2	1	1	0	0
	f	65/2+(5/2)θ	1/2	2	∗	∗	∗

Tabelul 6.18

Impunem condiția de (primal) admisibilitate:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\theta \geq 0 \\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\theta \geq 0 \\ \dfrac{13}{2}+\dfrac{1}{2}\theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad -\frac{1}{3} \leq \theta \leq 1$$

şi concluzionăm că:

II) Baza $\left[A^4, A^5, A^3\right]$ este optimă pentru toate programele P_θ cu $\theta \in$ [-1/3 , 1]

Să presupunem acum că $\theta < -\dfrac{1}{3}$ şi „foarte aproape”. Tabelul 6.18 arată că baza $\left[A^4, A^5, A^3\right]$ încetează a mai fi admisibilă, deoarece $\overline{b}_4 = \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\theta < 0$ şi că testul algoritmului simplex dual, de recunoaştere a incompatibilității, este verificat (toate constantele de pe linia variabilei x_4 sunt nenegative!). Prin urmare:

III) Pentru $\theta \in (-\infty , -1/3)$ programele P_θ sunt incompatibile.

Sinteza rezultatelor studiului este dată în diagrama din figura 6.3

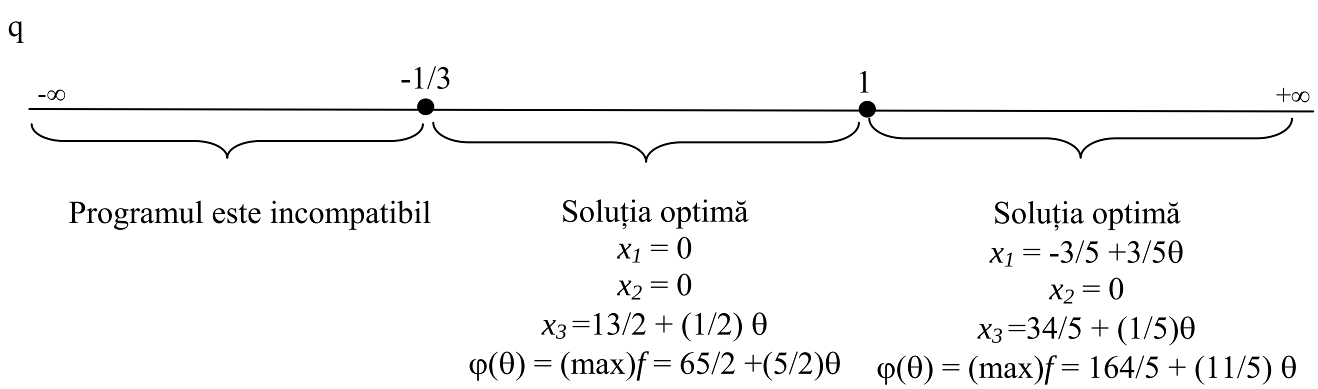


Figura 6.3

Probleme propuse

1. Se dă programul liniar:

$$(P)\begin{cases}(\max) f = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 \le 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0\end{cases}$$

Să sedetermine soluția optimă utilizând algoritmul simplex.

2. i) Care va fi soluția optimă a programului (P) dacă funcția obiectiv se schimbă în $f' = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$;

ii) Care va fi soluția optimă a programului (P) dacă funcția obiectiv se schimbă în $f' = x_1 + 2x_2 + 0{,}5x_3 + x_4$.

3. Să se determine intervalele de stabilitate ale coeficienților funcției obiectiv *f* din programul (P).

4. Care va fi soluția optimă a programului (P) dacă în a doua restricție termenul liber se schimbă în 13.

5. Să se determine intervalele de stabilitate ale termenilor liberi ai restricțiilor din programul (P).

6. i) Care va fi soluția optimă a programului (P) extins cu restricția $x_1 \ge 1$.

ii) Aceeaşi întrebare dacă la (P) se adaugă restricția $x_2 + x_3 \le 5$.

7. Ferma Găinuşa are 20000 de pui de găină care trebuie crescuți timp de 8 săptămâni înainte de comercializare.Norma săptămânală dde hrană creşte progresiv conform următorului calendar:

Săptămâna	1	2	3	4	5	6	7	8
Norma de hrană (kg/pasăre)	0,150	0,250	0,400	0,500	0,700	0,800	1,000	1,100

Tabelul 6.19

Pentru simplitatea modelului, din lista ingredientelor folosite la creşterea păsărilor au fost alese următoarele trei: calcar, cereale boabe şi făină de soia. Pentru a ajunge la greutatea cerută la desfacere, hrana trebuie să conțină o serie de principii nutritive în proporții prestabilite.În cazul de față, cerințele nutriționale se limitează la conținutul de calciu, proteine şi fibre. Informațiile privitoare la structura nutrițională a ingredientelor selectate şi la prețurile acestora sunt date în tabelul 6.20.

Ingredient	Conținutul (în kg) per kg de ingredient			Cost (euro/kg)
	Calciu	Proteine	Fibre	
Calcar	0,380	-	-	0,24
Cereale boabe	0,001	0,090	0,020	0,90
Făină de soia	0,002	0,500	0,080	3,20

Tabelul 6.20

Norma de hrană trebuie să conțină:

i) cel puțin 0,8% dar nu mai mult de 1,2% calciu;
ii) cel puțin 22% proteine;
iii) cel mult 5% fibre.

Elaborați un model liniar pentru prima săptămână şi apoi folosiți reoptimizarea pentru elaborarea unui program optim de creştere pentru celelalte săptămâni.
Soluție: Se va nota cu θ norma de hrană pe o săptămână pentru întregul lot de păsări. De exemplu norma primei săptămâni va fi de 0,150 × 20000 = 3000 kg
Variabilele modelului vor fi cantitățile x_1, x_2, x_3 de calcar, boabe, respectiv făină de soia care împreună alcătuiesc norma. Prin urmare:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \theta \quad (1)$$

Formalizarea structurii nutriționale:

Cerința i): $\frac{0,8}{100}\theta \le 0,380x_1 + 0,001x_2 + 0,002x_3 \le \frac{1,2}{100}\theta \Leftrightarrow \begin{cases} 38x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 \ge 0,8\theta & (2) \\ 38x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 \le 1,2\theta & (3) \end{cases}$

Cerința ii) : $0,090x_2 + 0,500x_3 \ge \frac{22}{100}\theta \quad \Leftrightarrow \quad 9x_2 + 50x_3 \ge 22\theta \quad (4)$

Cerința iii): $0,020x_2 + 0,080x_3 \le \frac{5}{100}\theta \quad \Leftrightarrow \quad 2x_2 + 8x_3 \le 5\theta \quad (5)$

Variabilele x_1, x_2, x_3 trebuie să satisfacă condițiile explicite:

$$x_1 \ge 0 \text{ , } x_2 \ge 0 \text{ , } x_3 \ge 0 \quad (6)$$

Funcția obiectiv formalizează costul ingredientelor incluse în normă:

$$f = 0,24x_1 + 0,90x_2 + 3,20x_3 \quad \to \quad (\min) \quad (7)$$

Reunind relațiile (1) – (7) obținem modelul general de elaborare a unei norme de hrană care să satisfacă cerințele nutriționale şi să aibe costul cel mai mic posibil:

$$\begin{cases} (\min) f = 0{,}24x_1 + 0{,}90x_2 + 3{,}20x_3 \\ x_1 + \quad x_2 + x_3 = \theta \\ 38x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 \geq 0{,}8\theta \\ 38x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 \leq 1{,}2\theta \\ 9x_2 + 50x_3 \geq 22\theta \\ 2x_2 + 8x_3 \leq 5\theta \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

O modalitate de elaborare a calendarului optim de creştere pe cele 8 săptămâni este rezolvarea programului (8) pentru fiecare normă săptămânală θ în parte. În cazul de față reoptimizarea înseamnă rezolvarea – o singură dată! – a programului (8) pentru θ = 1 după care soluția optimă a fiecărei săptămâni va rezulta din soluția optimă de referință prin „amplificare” cu valoarea θ a normei săptămânii respective!
Soluția optimă a programului (8) corespunzătoare valorii θ = 1 are componentele:

$$x_1^* = 0{,}028 \quad x_2^* = 0{,}649 \quad x_3^* = 0{,}323 \qquad (\min) f = 1{,}625$$

Aceasta înseamnă că un kg de hrană ar costa numai 1,625 euro şi s-ar compune din 28 grame de calcar, 649 grame de cereale boabe şi 323 grame de făină de soia.
Structura nutrițională:

Calciu:	0,380 × 0,028 + 0,001 × 0,649 + 0,002 × 0,323 = 0,012 kg;	Procent 1,2%
Proteine:	0,090 × 0,649 + 0,500 × 0,323 = 0,220 kg;	Procent 22%
Fibre:	0,020 × 0,649 + 0,080 × 0,323 = 0,039 kg;	Procent 3,9%

Pentru prima săptămână, necesarul de hrană este de 3000 kg şi s-ar compune din:

0,028 × 3000 = 84 kg calcar
0,649 × 3000 = 1947 kg cereale boabe
0,323 × 3000 = 969 kg făină de soia

şi ar costa:

1,625 × 3000 = 4875 euro

8. Studiați următoarele programe liniare parametrice P = (P_θ), $\theta \in$ R:

a) $(P_\theta)\begin{cases}(\max) f = (20+4\theta)x_1 + (30-3\theta)x_2 + 5x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 30 \\ 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 75 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 \le 45 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0\end{cases}$

b) $(P_\theta)\begin{cases}(\max) f = (10-\theta)x_1 + (12+\theta)x_2 + (7+2\theta)x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 30 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 20 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0\end{cases}$

c) $(P_\theta)\begin{cases}(\max) f = x_1 + 3x_2 \\ x_1 \le 10+2\theta \\ x_1 + x_2 \le 25-\theta \\ x_2 \le 10+2\theta \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$

d) $(P_\theta)\begin{cases}(\max) f = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 135-2\theta \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \le 78-\theta \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 30+\theta \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0\end{cases}$

Unitatea de învățare 7

ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ
Problema de transport. Formulare şi rezolvare

Cuprins

7.1 Tipuri speciale de programe linare
7.2 Problema de transport. Enunț şi model matematic
7.3 Caracterul special al problemei de transport
7.4 Construirea unei soluții inițiale pentru problema de transport echilibrată
7.5 Algoritm de rezolvare a problemei de transport echilibrate

Probleme propuse

7.1 Tipuri speciale de programe liniare

Până acum problema programării liniare a fost studiată în cea mai generală formă. Prezenta secțiune se constituie ca o introducere în studiul unor cazuri particulare importante. Aceste tipuri speciale au o serie de caracteristici comune. În primul rând, ele apar frecvent în modelarea unor contexte practice foarte diferite. Apoi, ele se compun dintr-un mare număr de restricții şi variabile ceeace face ca aplicarea directă a algoritmului simplex să necesite un impresionant efort de calcul. Dar cel mai important lucru este că matricea lor tehnologică are proprietăți interesante cum ar fi densitatea relativ mică a componenetelor nenule şi gruparea acestora conform unei anumite structuri. Ca urmare, pentru rezolvarea acestor probleme, au fost elaborate versiuni ale algoritmului simplex, special concepute în vederea exploatării structurii lor particulare, versiuni care au condus la importante reduceri ale efortului de calcul.

Iată de ce este important să cunoaştem şi să ne familiarizăm cu aceste tipuri particulare de programe liniare aşa încât în practică să le recunoaştem uşor şi să aplicăm procedura de rezolvare adecvată.

Probabil cea mai cunoscută problemă de programare liniară cu structură specială este problema de transport.Ea a fost formulată şi studiată, chiar mai înainte de apariția algoritmului simplex, de către HITCHCOCK (1941), KOOPMANS (1942) în SUA şi independent de către TOLSTOI (1930) şi KANTOROVICI (1939) în fosta Uniune Sovietică. Forma actuală de prezentare este datorată lui DANTZIG.

7.2 Problema de transport. Enunț şi model matematic

Un produs omogen este disponibil la **furnizorii** $F_1, F_2, \cdots, F_m$ în cantitățile $a_1, a_2, \cdots, a_m$ (> 0) şi solicitat (pentru consum sau prelucrare) de către **consumatorii** $C_1, C_2, \cdots, C_n$ în cantitățile $b_1, b_2, \cdots, b_n$ (> 0). Se cunoaşte **costul** $c_{ij} > 0$ **al transportării unei unități** de produs de la furnizorul F_i la consumatorul C_j pentru toți $i = 1, \cdots, m$ şi $j = 1, \cdots, n$.Se pune problema satisfacerii cererilor,în punctele de consum la **cel mai mic cost total de transport**.

În mod constant vom presupune că problema de transport astfel formulată este **echilibrată**, aceasta însemnând că:

$$\textbf{oferta totală} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \textbf{cererea totală} \qquad (1)$$

Din enunț rezultă că orice furnizor poate aproviziona orice consumator, bineînțeles în limita disponibilului său. Prin urmare există $m \cdot n$ **rute** posibile $F_i \rightarrow C_j$ pentru transportarea produsului de la furnizori la consumatori, rute evidențiate în figura 7.1.
Introducând variabilele:

$x_{ij} =$ cantitatea de produs livrată de furnizorul F_i consumatorului C_j $\quad i = 1, \cdots, m$; $j = 1, \cdots, n$

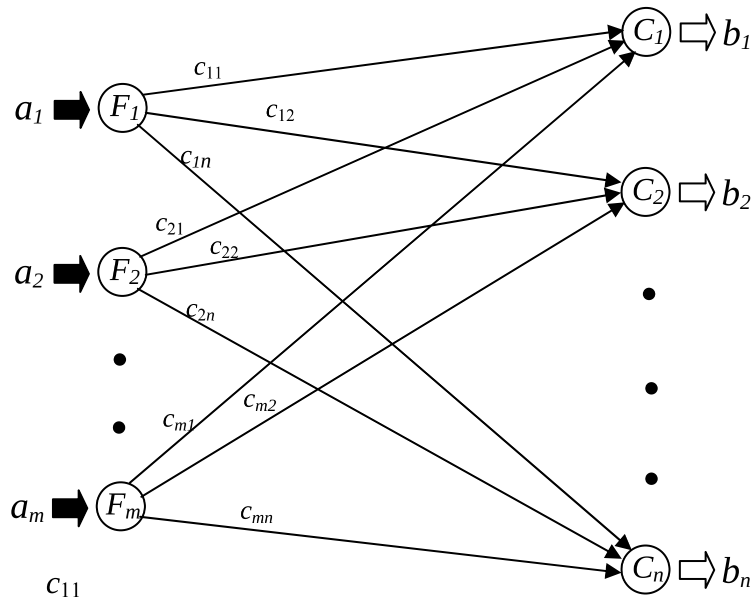


Figura 7.1

putem scrie următorul model matematic pentru problema de transport echilibrată:

$$
(PTE)\quad \begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1,\cdots,m & (2)\\
\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,\cdots,n & (3)\\
x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,\cdots,m\,;\; j = 1,\cdots,n & (4)\\
(\min) z = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & (5)
\end{cases}
$$

Ecuațiile (2) arată că, pentru fiecare furnizor F_i ,suma cantităților livrate consumatorilor este egală cu disponibilul său a_i.
Ecuațiile (3) arată că, pentru fiecare consumator C_j, totalul cantităților primite de la furnizori este egală cu cererea sa b_j.
Condițiile de nenegativitate (4) rezultă din semnificația variabilelor x_{ij}. Un $x_{ij} = 0$ înseamnă că furnizorul F_i nu livrează nimic consumatorului C_j.
Costul transportării cantității x_{ij} de la F_i la C_j este egal cu $c_{ij}x_{ij}$ astfel că suma (5) este expresia costului total al transporturilor efectuate.
Egalitățile din (2) şi (3) sunt consecința directă a condiției de echilibru (1).

Evident, (PTE) este o problemă de programare liniară în formă standard cu $m \cdot n$ variabile şi $m + n$ restricții.

Exemplul 7.1 Patru şantiere de construcții C_1 , C_2 , C_3 , C_4 se aprovizionează cu ciment de la trei depozite F_1 , F_2 , F_3. Cantitățile de ciment (în tone) disponibile în depozite, cele solicitate de şantiere precum şi costurile unitare de transport (per tonă) sunt date în tabelul 7.1.

	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
F_1	3	2	8	1	**120**
F_2	1	5	**4**	5	250
F_3	6	7	3	4	400
Cerere	150	**200**	240	180	770

Disponibilul depozitului F_1

Costul transportării unei tone de ciment de la F_2 la C_3

Cererea şantierului C_2

Tabelul 7.1

Se pune problema de a stabili în ce mod vor fi distribuite cele 770 t de ciment (adică cine pe cine aprovizionează şi cu cât!) astfel încât costul total al transporturilor efectuate să fie minim.

Va trebui să găsim sistemul de valori numerice $x^* = (x_{ij}^*)$ $i = 1,2,3$ $j = 1,2,3,4$ reprezentând cantitățile ce vor fi transportate pe cele $3 \cdot 4 = 12$ rute posibile astfel încât:

- disponibilele furnizorilor să fie epuizate:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 120 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 250 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 400 \end{aligned} \tag{2'}$$

- cererile consumatorilor să fie acoperite:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 150 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 200 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 240 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 180 \end{aligned} \tag{3'}$$

- valorile să fie nenegative:

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4 \tag{4'}$$

- costul total al transportului să fie minim:

$$z = 3x_{11} + 2x_{12} + 8x_{13} + 1 \cdot x_{14} + 1 \cdot x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + \\ + 6x_{31} + 7x_{32} + 3x_{33} + 4x_{34} \to \min \qquad (5')$$

În tabelul 7.2 a fost pusă în evidenţă matricea tehnologică a programului rezultat:

	A^{11}	A^{12}	A^{13}	A^{14}	A^{21}	A^{22}	A^{23}	A^{24}	A^{31}	A^{32}	A^{33}	A^{34}
$i = 1$	1	1	1	1								
2					1	1	1	1				
3									1	1	1	1
$j = 1$	1				1				1			
2		1				1				1		
3			1				1				1	
4				1				1				1

A^{ij} = coloana coeficienţilor variabilei x_{ij} în restricţiile (2') şi (3')

Tabelul 7.2

7.3 Caracterul special al problemei de transport

Din modelul general (2) – (5) al problemei de transport echilibrate (PTE) rezultă următoarele concluzii (pentru ilustrare vezi exemplul 7.1)

- PTE este un program liniar compatibil; de exemplu, sistemul de valori numerice:

$$x_{ij} = {a_i \cdot b_j}/{S} \quad i = 1, \cdots, m \quad j = 1, \cdots, n \text{ unde } S = a_1 + \cdots + a_m = b_1 + \cdots + b_n$$

este o soluţie admisibilă. Mai mult, PTE are întotdeauna optim finit.

- matricea tehnologică A se compune numai din 0 şi 1. Fiecare variabilă x_{ij} nu apare decât în două ecuaţii: în ecuaţia i din (2) şi în ecuaţia j din (3). Astfel, fiecare coloană A^{ij} din A are numai două componente nenule ambele egale cu 1. În concluzie din cele $(m+n) \cdot mn$ componente ale matricii A numai $2mn$ sunt nenule, astfel că densitatea elementelor nenule este $\frac{2}{m+n}$ (de exemplu pentru o PTE cu 5 furnizori şi 20 de consumatori, densitatea elementelor nenule este $\frac{2}{5+20} \cdot 100 = 8\%$)

- din cauza condiției de echilibru (1), suma ecuațiilor din (2) este egală cu suma ecuațiilor din (3). Atunci oricare dintre aceste $m+n$ ecuații este consecința liniară a celorlalte şi ca urmare poate fi omisă. Se constată uşor că cele rămase sunt liniar independente astfel că rangul matricii A este $m+n-1$. Se demonstrează că **orice determinant extras din A are una din valorile 1 , 0 sau -1.**

- o consecință imediată a proprietății precedente este faptul că în **orice soluție de bază a PTE există $m+n-1$ variabile bazice**. Valorile acestora rezultă în mod unic anulând variabilele nebazice şi rezolvând sistemul rămas. Calcularea valorilor variabilelor bazice nu necesită decât operații de adunare şi scădere. În consecință, **dacă ofertele a_i şi cererile b_j sunt exprimate prin numere întregi, atunci orice soluție de bază a PTE va avea componentele întregi şi în particular PTE va avea o soluție optimă întreagă.**

Algoritmul de rezolvare a PTE care va fi descris în secțiunile următoare este o versiune a algoritmului simplex, adaptată la specificul acestei probleme.

În notațiile introduse, un ansamblu de valori numerice $x=(x_{ij})$ $i=1,\cdots,m$ $j=1,\cdots,n$ care satisface (2), (3), (4) se va numi **program admisibil de transport** şi va fi înscris într-un tabel cu *m* rânduri corespunzătoare furnizorilor şi *n* coloane corespunzătoare consumatorilor.
În acord cu teoria generală a algoritmului simplex, pentru rezolvarea PTE, avem nevoie de un **program de transport inițial** care să fie o **soluție de bază**. Acest program va fi modificat în mai multe etape (iterații) în scopul micşorării costului aferent până la determinarea programului cu cel mai mic cost.

7.4 Construirea unei soluții inițiale a PTE

Menținem notațiile introduse în secțiunile precedente. **Următorul procedeu general construieşte un program de transport $\bar{x}=(\bar{x}_{ij})$ pentru PTE care se dovedeşte a fi o soluție admisibilă de bază!**

START Se ordonează într-un **şir**, într-un fel oarecare, toate cele $m \cdot n$ rute de transport. Toate aceste rute se declară **neblocate**.
Conținutul unei iterații:

1) Fie (F_k, C_l) **prima rută neblocată** din şir. Pe această rută se va transporta cantitatea (vom spune că s-a făcut **alocarea**):

$$\bar{x}_{kl} = \min\{a_k , b_l\}$$

unde

$a_k \equiv$ disponibilul **curent** al furnizorului F_k

$b_l \equiv$ cererea **curentă** (neacoperită) a consumatorului C_l

Mărimea $\bar{x}_{kl}$ se înscrie în tabel în celula (F_k, C_l). Ruta (F_k, C_l) se declară **blocată**.

2) Se **actualizează** disponibilul lui F_k şi cererea lui C_l:

$$a_k \leftarrow a_k - \bar{x}_{kl} \quad ; \quad b_l \leftarrow b_l - \bar{x}_{kl}$$

3) după actualizare sunt posibile trei situații:

3.1) $a_k = 0$ dar $b_l > 0$. Se vor bloca toate rutele încă neblocate cu originea în F_k (aceste rute nu mai pot fi folosite deoarece disponibilul lui F_k a fost epuizat!) Astfel, în tabelul soluției care se construieşte, rândul corespunzător furnizorului F_k este în întregime blocat.

3.2) $b_l = 0$ dar $a_k > 0$.Se vor bloca toate rutele încă neblocate cu destinația C_l (pe motiv că cererea lui C_l a fost acoperită!) În acest caz coloana consumatorului C_l este blocată în întregime.

3.3) $a_k = b_l = 0$. Acest caz apare atunci când, la pasul 1:

disponibilul curent al furnizorului F_k = cererea curentă a consumatorului C_l

Dacă este aşa, vom bloca după dorință, fie rândul furnizorului F_k fie coloana consumatorului C_l **dar nu pe amândouă!**
Dacă mai rămân rute neblocate se reia pasul 1, altminteri **STOP**.

Lesne de văzut că după fiecare alocare, în tabelul în care se înscriu componentele soluției $\bar{x}$ ce se construieşte, se blochează **în întregime** fie un **rând** (≡furnizorul implicat în alocare şi-a epuizat stocul disponibil) fie o **coloană** (≡prin alocarea făcută consumatorul implicat şi-a acoperit întreaga cerere) **dar nu amândouă**. Cum în total sunt $m+n$ rânduri şi coloane rezultă că în final vor fi folosite **exact** $m+n-1$ rute din cele $m \cdot n$ disponibile. Este posibil ca pe unele din rutele alese alocarea să fie egală cu **zero** şi asta se întâmplă ori de câte ori apare situația 3.3)! În continuare, rutele (F_i, C_j) **efectiv** folosite la transport $(\equiv \bar{x}_{ij} > 0)$ se vor numi **rute ocupate**. Soluția construită se va zice **nedegenerată** dacă numărul rutelor ocupate este exact $m+n-1$, altminteri vom zice că soluția este **degenerată.**

Metodele efective de construire a unui program de transport diferă prin modul de ordonare a rutelor. Astfel:

- în **metoda colțului de Nord -Vest** rutele sunt ordonate **lexicografic**:

$$(F_1,C_1), (F_1,C_2), \cdots\cdots, (F_1,C_n), (F_2,C_1), \cdots\cdots, (F_2,C_n), \cdots\cdots, (F_m,C_n)$$

- în **metoda costului (unitar) de transport minim** rutele sunt examinate **în ordinea crescătoare** a costurilor unitare de transport.

Exemplul 7.2 Se va considera problema de transport echilibrată din exemplul 7.1. Prin metoda colțului de N-V se obține programul de transport **nedegenerat** – cu 6 = 3 + 4 – 1 rute ocupate – dat în tabelul 7.3.
Metoda este foarte simplă însă produce soluții în general „scumpe” deoarece nu ține cont de costurile unitare de transport.

Atenție: numerele înscrise în paranteze indică **ordinea** în care s-au făcut alocările; cu ajutorul lor cititorul va putea reconstitui „în dinamică” modul în care a fost construită soluția!

(1) **120**	*	*	*
(2) **30**	(3) **200**	(4) **20**	*
*	*	(5) **220**	(6) **180**

3×120 =	360
1× 30 =	30
5×200 =	1000
4× 20 =	80
3×220 =	660
4×180 =	720
Cost total =	2850 u.m.

Tabelul 7.3

Prin metoda costului minim se obține soluția din tabelul 7.4 deasemeni nedegenerată.

	*	*	(2) **120**
(1) **150**	(5) **100**		*
*	(6) **100**	(3) **240**	(4) **60**

1×150 =	150
1×120 =	120
3×240 =	720
4× 60 =	240
5×100 =	500
7×100 =	700
Cost total =	2430 u.m.

Tabelul 7.4

Următorul procedeu dă rezultate excelente în sensul că generează o soluție foarte apropiată de soluția optimă!

Metoda diferențelor maxime (Vogel) La **START** toate rutele se declară **neblocate**.
Conținutul unei iterații:

1) Pe fiecare rând sau coloană – din tabelul soluției care se construieşte – în care mai există măcar **două** rute neblocate se face diferența dintre **cel mai mic cost „neblocat”** şi **cel imediat superior „tot neblocat”**, cu mențiunea că dacă costul neblocat minim **nu este unic** diferența se va lua egală cu **zero**!

2) Se identifică rândul sau coloana cu **cea mai mare diferență** (în valoare absolută). Dacă diferența maximă nu este unică are prioritate rândul sau coloana cu cel mai mic cost „neblocat”.

3) Pe rândul sau coloana aleasă se face o alocare pe ruta de **cost (neblocat) minim** după care se fac actualizările corespunzătoare şi se blochează rutele ce nu mai pot fi folosite, conform instrucțiunilor din procedeul general.

În caz că a rămas un singur rând sau o singură coloană cu mai mult de două rute neblocate, ultimele alocări sunt **unic determinate** şi se vor face în rutele neblocate rămase. **STOP**.

Altminteri, se reiau paşii descrişi mai sus în cadrul unei noi iterații.

Exemplul 7.3 Se consideră problema de transport echilibrată cu datele din tabelul 7.5:

	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
F_1	3	7	6	4	510
F_2	2	4	3	2	230
F_3	4	3	8	5	360
Cerere	310	370	200	220	1100

Tabelul 7.5

Vom determina o soluție prin metoda diferențelor maxime. Calculele sunt sintetizate în următoarele tabele. Pentru determinarea rutei în care se face prima alocare vezi tabelul 7.6.1

					Diferențe pe rânduri
	3	7	6	4	**1 = 4 – 3**
	2	4	3	2	**0 = 2 – 2**
	4	3	8	5	**1 = 4 - 3**
Diferențe pe coloane	**1 = 3 - 2**	**1 = 4 - 3**	**3 = 6 - 3**	**2 = 4 - 2**	

⇨

		*	
		200 (1)	
		*	

Tabelul 7.6.1

Cea mai mare diferență se găseşte în coloana 3. Conform instrucțiunilor metodei, prima alocare se va face pe cea mai ieftină rută din coloana 3, adică pe ruta (F_2 , C_3). După alocare blocăm şi celelalte rute ale coloanei 3 deoarece ele nu mai pot fi folosite în alocările ulterioare, cererea consumatorului C_3 fiind acoperită în totalitate! Refacem diferențele în rândurile şi coloanele rămase.
În tabelele 7.6.2 şi 7.6.3 se arată cum şi unde au fost făcute următoarele două alocări.Asteriscurile indică rutele blocate; costurile asociate acestor rute ne mai fiind luate în considerare în evaluarea diferențelor!

					Diferențe pe rânduri
	3	7	*	4	**1 = 4 – 3**
	2	4	*	2	**0 = 2 – 2**
	4	3	*	5	**1 = 4 - 3**
Diferențe pe coloane	**1 = 3 - 2**	**1 = 4 - 3**	**-**	**2 = 4 - 2**	

⇨

		*	
*	*	200 (1)	**30** **(2)**
		*	

Tabelul 7.6.2

					Diferențe pe rânduri
	3	7	*	4	**1 = 4 – 3**
	*	*	*	*	**-**
	4	3	*	5	**1 = 4 - 3**
Diferențe pe coloane	**1 = 4 - 3**	**4 = 7 - 3**	**-**	**1 = 5 - 4**	

⇨

		*	
‘	*	200 (1)	30 (2)
*	**360** **(3)**	*	*

Tabelul 7.6.3

Ultimele trei alocări se fac obligatoriu în cele trei rute neblocate din rândul 1 – vezi tabelul 7.6.4

3	7	*	4
*	*	*	*
*	*	*	*

⇨

310 $^{(4)}$	**10** $^{(5)}$	*	**190** $^{(6)}$
		200 $^{(1)}$	30 $^{(2)}$
*	360 $^{(3)}$	*	*

Tabelul 7.6.4

A rezultat o soluție nedegenerată cu un cost total de 3500u.m. Prin metoda costului unitar minim s-ar fi obținut soluția

80 $^{(3)}$	10 $^{(6)}$	200 $^{(5)}$	220 $^{(4)}$
230 $^{(1)}$			
	360 $^{(2)}$		

Tabelul 7.7

cu un cost mai mare, de 3930u.m.

Pentru problema din exemplul 7.1 metoda diferențelor maxime conduce la soluția găsită prin metoda costului minim.

7.5 Algoritm de rezolvare a problemei de transport echilibrate

START Se presupune cunoscută o **soluție admisibilă de bază** $\bar{x} = (\bar{x}_{ij})$, determinată cu una dintre metodele descrise în secțiunea D. **Presupunem că soluția** $\bar{x}$ **este nedegenerată adică are exact** $m + n - 1$ **componente nenule.**
Conținutul unei iterații:

I) Testarea optimalității soluției curente

I.1) se asociază furnizorilor $F_1, \cdots, F_m$ variabilele $u_1, \cdots, u_m$. Se asociază consumatorilor $C_1, \cdots, C_n$ variabilele $v_1, \cdots, v_n$.

I.2) se asociază fiecărei rute (F_i, C_j) ocupate $(\Leftrightarrow \bar{x}_{ij} > 0!)$ ecuația $u_i + v_j = c_{ij}$.

I.3) se determină o soluție particulară a sistemului construit (de exemplu, se dă valoarea 0 uneia dintre variabile, de regulă celei care apare de cele mai multe ori în sistem)

I.4) pentru rutele neocupate $(\Leftrightarrow \bar{x}_{ij} = 0)$ se calculează mărimile:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

I.5) test de optimalitate: dacă toți $\Delta_{ij} \leq 0$ soluția curentă este optimă, altfel spus costul total de transport asociat este cel mai mic posibil. **STOP**
În caz contrar se trece la:

II) Construirea unui program de transport mai bun, adică cu un cost total de transport mai mic

II.1) se identifică ruta (F_{i_0}, C_{j_0}) cu proprietatea

$$\Delta_{i_0 j_0} = \max \Delta_{ij}$$

(evident $\Delta_{i_0 j_0} > 0$)

II.2) în tabelul soluției curente se construieşte **ciclul** rutei (F_{i_0}, C_{j_0}). Acesta este un **drum închis care începe şi sfârşeşte în celula (F_{i_0}, C_{j_0}) şi care, în rest, coteşte în unghi drept numai prin celule ocupate**

II.3) se marchează alternativ cu **+** şi **−** colțurile ciclului începând cu **+** în celula (F_{i_0}, C_{j_0})

II.4) se calculează minimul θ al valorilor $\overline{x}_{ij}$ situate în colțurile marcate cu **−** (clar $\theta > 0$)

II.5) se construieşte o nouă soluție de bază a PTE astfel:

- se adună θ la valorile $\overline{x}_{ij}$ situate în colțurile ciclului marcate cu **+** ;
- se scade θ din valorile $\overline{x}_{ij}$ situate în colțurile ciclului marcate cu **−**;
- toate celelalte componente ale soluției curente $\overline{x}$, nesituate în colțurile ciclului, nu se modifică.

Atenție: în caz că noua soluție este degenerată se aplică „tehnica de perturbare” explicată în secțiunea 7.6!
Se revine la pasul I) în cadrul unei noi iterații.

Observații şi precizări

- Nedegenerarea soluțiilor testate de algoritmul descris mai sus este **esențială**! **Într-adevăr, dacă toate soluțiile cercetate sunt nedegenerate, algoritmul se opreşte într-un număr finit de iterații (conform teoriei generale a algoritmului simplex!).** În următoarea secțiune vom vedea cum trebuie procedat în situația în care este necesar să se opereze cu soluții de bază degenerate.

- Ca urmare a ipotezei de nedegenerare, sistemul liniar construit în pasul I.2) are $m+n-1$ ecuații şi $m+n$ variabile. El are o infinitate de soluții.

- Se demonstrează că mărimile Δ_{ij} calculate în pasul I.4) nu depind de soluția particulară aleasă în pasul precedent.Conform teoriei generale a algoritmului simplex (adaptată la specificul PTE!) valorile Δ_{ij} **sunt de fapt costurile reduse asociate variabilelor nebazice (≡ rutelor neocupate!) din soluția testată.** Ele au următoarea interpretare economică prin care se justifică testul de optimalitate din pasul I.5

Fie $F_i \rightarrow C_j$ o rută **neocupată** $(\equiv \bar{x}_{ij} = 0)$.Valoarea Δ_{ij} asociată arată cu cât creşte sau descreşte costul total aferent soluției curente $\bar{x}$ în cazul în care aceasta se modifică în scopul folosirii rutei $F_i \rightarrow C_j$ .Mai precis, **dacă $\Delta_{ij} > 0$, modificarea soluției $\bar{x}$ în scopul transportării unei unități de produs de la F_i la C_j duce la scăderea costului total cu valoarea Δ_{ij}. Dacă $\Delta_{ij} < 0$,aceeaşi modificare conduce la creşterea costului total cu valoarea $-\Delta_{ij}$. Evident dacă $\Delta_{ij} = 0$ utilizarea rutei $F_i \rightarrow C_j$ nu antrenează nici o schimbare în costul total.**

- Se poate arăta că dacă soluția curentă este nedegenerată atunci ciclul construit la pasul II.2 **există** şi este **unic.** El are un număr **par** de colțuri.

- Noua soluție construită în pasul II.5 şi notată $\bar{x}'$ este mai bună decât soluția anterioară $\bar{x}$ deoarece se poate arăta că:

$$f(\bar{x}') = f(\bar{x}) - \theta \cdot \Delta_{i_0 j_0} < f(\bar{x})$$

Exemplul 7.4 Vom determina soluția optimă a problemei de transport din exemplul 7.1 plecând de la soluția construită prin metoda costului minim (exemplul 7.2, tabelul 7.4)

Iterația 1

Soluția curentă
Costul total asociat = 2430

			120
150	100		
	100	240	60

Tabelul 7.8

$\Rightarrow$

Sistemul ecuațiilor $u_i+v_j = c_{ij}$ asociate rutelor (F_i , C_j) ocupate

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1				$u_1 + v_4 = 1$
u_2	$u_2 + v_1 = 1$	$u_2 + v_2 = 5$		
u_3		$u_3 + v_2 = 7$	$u_3 + v_3 = 3$	$u_3 + v_4 = 4$

Tabelul 7.8.1

Comentarii: soluția curentă este înscrisă în tabelul 7.8, identic cu tabelul 7.4 .Pentru cercetarea optimalității acestei soluții am introdus variabilele u_1, u_2, u_3 corespunzătoare celor trei furnizori şi variabilele v_1, v_2, v_3, v_4 corespunzătoare consumatorilor. Fiecărei rute (F_i, C_j) ocupate în soluție i s-a asociat ecuația $u_i + v_j = c_{ij}$ (vezi tabelul 7.8.1)

Determinăm o soluție particulară a sistemului construit dând valoarea 0 variabilei u_3 (care apare de cele mai multe ori) – vezi figura 7.2

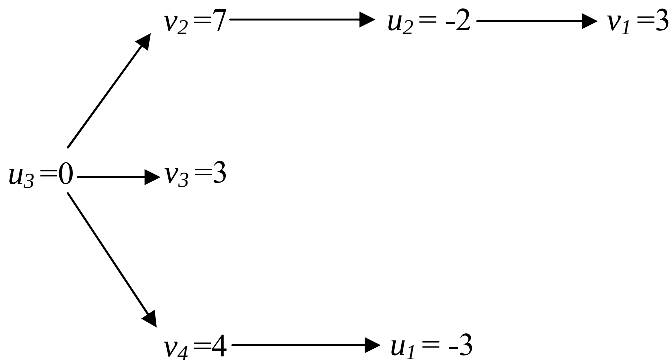


Figura 7.2

Valorile Δ_{ij} sunt calculate în tabelul 7.8.2 – asteriscurile indică rutele ocupate în soluția curentă. Se găseşte $\Delta_{12} = 2 > 0$ şi ca urmare testul de optimalitate nu este îndeplinit. În tabelul alăturat 7.8.3 – identic cu tabelele 7.4 şi 7.8 - este vizualizat ciclul rutei (F_1, C_2)

	$v_1 = 3$	$v_2 = 7$	$v_3 = 3$	$v_4 = 4$
$u_1 = -3$	-3	2	-8	*
$u_2 = -2$	*	*	-3	-3
$u_3 = 0$	-3	*	*	*

Tabelul 7.8.2

$\Rightarrow$

	+		− **120**
150	100		
	− **100**	240	+ **60**

Tabelul 7.8.3

Colțurile ciclului au fost marcate alternativ cu **+** şi **−** începând cu **+** în celula (F_1, C_2). În continuare se determină minimul valorilor înscrise în celulele marcate cu **−**

$$\theta = \min\{\bar{x}_{14} = 120\,,\ \bar{x}_{32} = 100\} = 100$$

şi se construieşte o nouă soluție a problemei de transport date (vezi tabelele 7.9 şi 7.9.1).

	0 + 100		**120 - 100**
150	100		
	100 - 100	240	**60 +100**

Tabelul 7.9

Noua soluție este nedegenerată. Costul total asociat $= f(\bar{x}) - \theta \cdot \Delta_{12} = 2430 - 100 \cdot 2 = 2230$ u.m.

Iterația 2

Soluția curentă
Costul total asociat = 2230

	100		20
150	100		
		240	160

Tabelul 7.9.1

⇒

Sistemul ecuațiilor $u_i+v_j = c_{ij}$ asociate rutelor (F_i, C_j) ocupate

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1		$u_1+v_2=2$		$u_1+v_4=1$
u_2	$u_2+v_1=1$	$u_2+v_2=5$		
u_3			$u_3+v_3=3$	$u_3+v_4=4$

Tabelul 7.9.2

O soluție particulară a sistemului afişat în tabelul 7.9.2 este dată în figura 7.3:

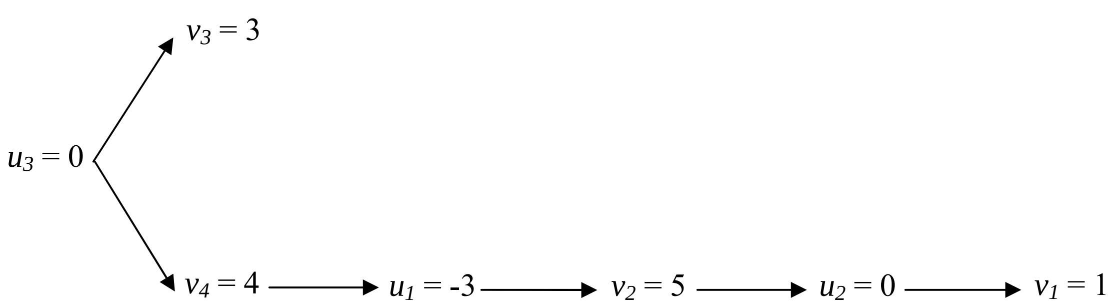


Figura 7.3

În tabelul 7.9.3 sunt calculate mărimile $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ asociate rutelor nefolosite în soluția curentă.

	$v_1 = 1$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 4$
$u_1 = -3$	-5	*	-8	*
$u_2 = 0$	*	*	-1	-1
$u_3 = 0$	-5	-2	*	*

Deoarece $\Delta_{ij} \leq 0$
STOP: soluția curentă este optimă!

Tabelul 7.9.3

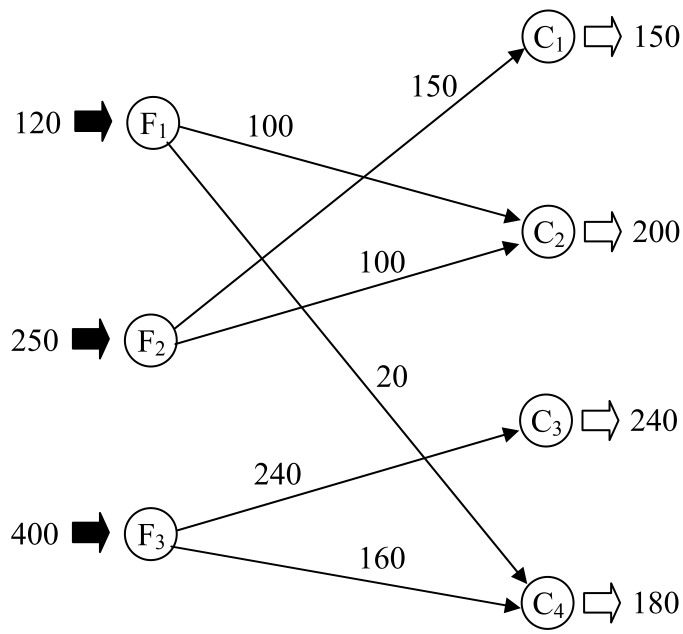


Figura 7.4

În figura 7.4 sunt puse în evidență cele şase rute folosite în soluția optimă pentru transportarea cimentului de la depozite la şantiere precum şi cantitățile transportate.
După cum era şi de aşteptat, soluția inițială, generată prin metoda costului unitar de transport minim, a fost foarte bună: într-o singură iterație s-a găsit soluția optimă!

7.6 Tratarea soluțiilor degenerate

Algoritmul descris funcționează corect numai dacă soluția (de bază) inițială şi soluțiile (de bază) cercetate pe parcurs sunt nedegenerate. Foarte des însă, în rezolvarea problemelor de transport, apar soluții degenerate. Ce facem într-o asemenea situație ? Vom proceda în felul următor:

În momentul apariției unei soluții de bază degenerate vom perturba uşor datele problemei aşa încât soluția în cauză să capete componentele nenule care îi lipsesc. După determinarea soluției optime a problemei perturbate, eliminăm perturbațiile obținând soluția optimă a problemei originale.

O soluție de bază degenerată nu poate apare decât în două situații:

I) **La construirea unei soluții inițiale** când, la efectuarea unei alocări pe o rută, să zicem pe ruta (F_k, C_l), se întâmplă ca:

disponibilul **curent** al furnizorului F_k = cererea **curentă** a consumatorului C_l (*)

În acest caz vom mări cu un $\varepsilon > 0$ foarte mic fie disponibilul lui F_k fie cererea lui C_l . Să presupunem că am „perturbat" disponibilul lui F_k Este clar că în urma acestei operații problema de transport s-a „dezechilibrat"! Pentru reechilibrare vom adăuga același $\varepsilon > 0$ la cererea unuia dintre consumatorii care n-au primit întreaga cantitate cerută, dar altul decât C_l !
Efectuăm alocarea pe ruta (F_k, C_l) precum și celelalte alocări care urmează. Dacă situația (*) nu mai apare va rezulta o **soluție nedegenerată a problemei perturbate** cu o componentă **nenulă** egală cu ε. După aplicarea algoritmului de optimizare se va face $\varepsilon = 0$.

Exemplul 7.5 Determinăm o soluție inițială prin metoda colțului de N-V pentru problema de transport echilibrată cu datele din tabelul 7.10.

	C_1	C_2	C_3	Disponibil
F_1	2	5	1	200
F_2	4	3	3	150
Necesar	100	100	150	350

Tabelul 7.10

La a doua alocare, pe ruta (F_1, C_2) avem sitația 3.3 semnalată în secțiunea 7.4 și renotată aici cu (∗):

disponibilul curent al lui F_1 = cererea lui C_2 = 100

După alocare ar trebui blocate atât rândul F_1 cât și coloana C_2; blocând numai coloana C_2 și continuând alocările se obține soluția din tabelul 7.11.

(1) **100**	(2) **100**	(3) **0**
*	*	(4) **150**

Tabelul 7.11

Conform teoriei, aceasta este o soluție de bază a problemei date însă degenerată deoarece are numai trei componente nenule în loc de 4 = 2 + 3 – 1. Înlocuind zeroul din ruta (F_1, C_3) cu un ε>0 foarte mic se obține o soluție nedegenerată.

100	**100**	ε
		150

Tabelul 7.11.1

dar pentru problema cu datele perturbate:

	C_1	C_2	C_3	Disponibil
F_1	2	5	1	200+ε
F_2	4	3	3	150
Necesar	100	100	150+ε	350+ε

Tabelul 7.10.1

Am aplicat acestei soluții algoritmul de optimizare:

	$v_1=2$	$v_2 = 5$	$v_3 = 1$
$u_1= 0$	100	100 −	ε +
$u_2= 2$		+	150 −

Tabelul 7.11.2

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$

*	*	*
0	4	*

Tabelul 7.11.3

	$v_1=2$	$v_2 = 5$	$v_3 = 1$
$u_1= 0$	100 −		100 + ε +
$u_2= 2$	+	100	50 −

Tabelul 7.12

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$

*	- 4	*
0	*	*

Tabelul 7.12.1

50		150 +ε
50	100	

Tabelul 7.13

Soluția din tabelul 7.12 este optimă (pentru problema perturbată!). Deoarece în tabelul 7.12.1 avem $\Delta_{21} = 0$ problema perturbată mai are o soluție optimă de bază, indicată în tabelul 7.13. Luând ε = 0 se obțin două soluții optime de bază x^1 şi x^2 pentru problema originală, ambele nedegenerate – vezi tabelele 7.14 şi 7.15

x^1

100		100
	100	50

Tabelul 7.14

x^2

50		150
50	100	

Tabelul 7.15

În acord cu teoria generală a programării liniare, problema de transport dată are o infinitate de soluții

100 - 50α		100 +50α
50α	100	50 - 50α

Tabelul 7.16

75		125
25	100	25

Tabelul 7.16.1

optime de forma **(1-α)** $\boldsymbol{x^1}$ **+ α** $\boldsymbol{x^2}$ cu $0 \le \alpha \le 1$. Componentele soluției optime generale sunt date în tabelul 7.16 Pentru α = 0 sau 1 regăsim soluțiile de bază x^1 respectiv x^2. Pentru $0 < \alpha < 1$ soluțiile corespunzătoare nu mai sunt soluții de bază – acestea au cinci componente nenule, cu una mai mult decât soluțiile de bază!! În tabelul 7.16.1 este dată soluția optimă nebazică corespunzătoare lui α = ½.

Degenerarea poate apare şi în cursul aplicării algoritmului de optimizare, atunci când:

II) la pasul II.4), minimul θ al mărimilor înscrise în colțurile circuitului marcate cu − nu este unic

Exemplul 7.6 Să presupunem că în rezolvarea unei probleme de transport echilibrate s-a ajuns la soluția dată în tabelul 7.17 (cititorul zelos va reconstitui cu uşurință ofertele furnizorilor şi cererile consumatorilor!). Se ştie că soluția nu este optimă şi că o soluție mai bună va rezulta din ciclul rutei (F_2 , C_3) – vezi tabelul 7.17.1.

	80		40
100	40		
		50	30

Tabelul 7.17

	80 +		40 −
100	40 −	+	
		50 −	30 +

Tabelul 7.17.1

Se observă că $\theta = \min\{ x_{14} = 40 \, , x_{22} = 40 \, , x_{33} = 50 \} = 40$ **nu este unic** astfel că, după redistribuirea lui $\theta = 40$ pe colțurile ciclului, rezultă soluția **degenerată** din tabelul 7.18 căreia nu i se mai poate aplica algoritmul de optimizare!

	120		
100		40	
		10	70

Tabelul 7.18

Pentru evitarea acestei situații, în tabelul 7.17 vom modifica puțin una dintre valorile „egale cu 40”. De exemplu „perturbăm” $x_{22} = 40 + \varepsilon$ cu ε > 0 foarte mic. Aceasta revine la a mări cu ε atât disponibilul furnizorului F_2 cât şi cererea consumatorului C_2 – vezi tabelul 7.17.2

	80		40
100	40+ε		
		50	30

Tabelul 7.17.2

	80		40
100	40+ε		
		50	30

Tabelul 7.17.3

Reluăm algoritmul de optimizare cu pasul II.4) însă pentru problema perturbată! (vezi tabelul 7.17c). De această dată, minimul θ va fi unic: $\theta = \min\left\{ x_{14} = 40\,, x_{22} = 40 + \varepsilon\,, x_{33} = 50 \right\} = 40$ şi după redistribuirea sa se obține – **pentru problema perturbată !**– soluția **nedegenerată**:

	120		
100	ε	40	
		10	70

Tabelul 7.18.1

căreia i se poate aplica algoritmul de optimizare. La terminare se va face ε = 0.

Probleme propuse

Pentru problemele de transport echilibrate de mai jos:

i) Determinați soluții inițiale prin metodele descrise (metoda colțului de NV, metoda costului unitar de transport minim, metoda diferențelor maxime sau alte metode...);

ii) Determinați soluția optimă plecând de la cea mai bună soluție găsită la i).

iii) Vizualizați rutele folosite în soluția optimă ca în figura 7.4.

Mare atenție la rezolvarea situațiilor de degenerare!

1.

Furnizori	Consumatori			Disponibil
	C_1	**C_2**	**C_3**	
F_1	5	7	12	35
F_2	11	6	9	45
F_3	14	10	2	50
Cerere	50	40	30	130

Tabelul 7.19

2.

Furnizori	Consumatori						Disponibil
	C_1	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	**C6**	
F_1	30	27	15	42	25	10	2200
F_2	20	22	20	17	12	22	2000
F_3	25	14	10	24	34	8	1000
F_4	18	25	28	30	30	28	1300
Cerere	1200	800	700	1300	1000	1500	6500

Tabelul 7.20

3.

Furnizori	Consumatori					Disponibil
	C_1	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	
F_1	15	21	27	3	22	100
F_2	18	16	25	12	29	60
F_3	6	5	11	4	6	50
F_4	21	7	19	14	9	40
Cerere	10	30	120	40	50	250

Tabelul 7.21

4.

Furnizori	Consumatori					Disponibil
	C_1	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	
F_1	3	1	7	2	4	40
F_2	3	2	1	4	1	30
F_3	1	1	4	1	2	50
F_4	3	7	5	6	6	30
Cerere	20	30	30	20	50	150

Tabelul 7.22

5.

Furnizori	Consumatori						Disponibil
	C_1	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	**C6**	
F_1	9	12	9	6	9	10	500
F_2	7	3	7	7	5	5	600
F_3	6	5	9	11	3	11	200
F_4	6	8	11	2	2	10	900
Cerere	400	400	600	200	400	200	2200

Tabelul 7.23

Unitatea de învățare 8

ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ
Problema de transport. Aplicații variate

Cuprins

8.1 Ilustrări practice ale problemei de transport
8.2 Problema transferului

Probleme propuse

8.1 Ilustrări practice ale problemei de transport

Un prim obiectiv al secțiunii este acela de a arăta cum se soluționează o serie de situații speciale ce pot apare în studiul problemelor de transport şi care amintesc de reoptimizarea din programarea liniară generală: **modificări în structura ofertei sau a cererii, blocarea unor rute, maximizarea profitului rezultat din activitatea de transport** etc

Al doilea obiectiv vizează problemele de transport **neechilibrate**. Nu întotdeauna, condiția de echilibru (1) din secțiunea 7.2 (unitatea de învățare 7)

$$\text{oferta totală} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \text{cererea totală}$$

este îndeplinită. Dacă oferta totală > cererea totală, problema de transport are în mod clar soluții. Reducerea la o problemă echilibrată se face prin introducerea unui „consumator fictiv” a cărui cerere este egală cu excesul de ofertă. Pe „rutele” ce leagă furnizorii reali de consumatorul fictiv, costurile unitare de transport se iau egale cu zero. În mod logic, cantitățile „livrate” de (unii) furnizori consumatorului fictiv se interpretează drept cantități rămase în stoc.
Dacă din contră, oferta totală < cererea totală, lucrurile sunt ceva mai delicate. În primul rând problema de transport – aşa cum a fost ea formulată în secțiunea 7.2 – nu mai are soluții! S-ar putea pune problema repartizării – la cel mai mic cost de transport – a ofertei totale insuficiente către consumatori, numai că unii s-ar putea să primească întreaga cantitate solicitată sau „pe aproape” în timp ce alții s-ar putea să primească foarte puțin sau chiar nimic! Se ridică aici o chestiune principială: cum ar trebui făcută repartizarea ofertei totale insuficiente astfel încât „penuria” să fie suportată **echitabil** de către toți consumatorii!

În al treilea rând, dorim să semnalăm, prin câteva exemple, faptul că practica economică furnizează numeroase **situații care nu implică un transport în sensul propriu al cuvântului dar care pot fi modelate ca probleme de transport.**

Exemplul 8.1 Se consideră problema de transport echilibrată cu datele din tabelul 8.1

	C_1	C_2	C_3	Disponibil
F_1	2	5	3	50
F_2	4	8	3	150
F_3	7	9	5	150
Cerere	100	150	100	350

Tabelul 8.1

i) să se determine programul de transport care minimizează costul total.
ii) cum se modifică programul şi costul total dacă cel puțin 50% din cererea consumatorului C_1 trebuie asigurată de furnizorul F_3.
iii) cum se modifică programul şi costul total de la i) dacă ruta $F_2 \to C_3$ nu mai poate fi utilizată.

Soluție. i) Metoda diferențelor maxime furnizează direct următoarea soluție optimă de bază, nedegenerată:

	C_1	C_2	C_3
F_1		50	
F_2	100		50
F_3		100	50

Tabelul 8.2

Problema mai are o soluție optimă de bază, de astă dată degenerată – vezi tabelul 8.3:

	C_1	C_2	C_3
F_1	50		
F_2	50		100
F_3		150	

Tabelul 8.3

Costul total de transport are valoarea minimă de 1950 u.m.

Notă: Cititorul interesat este sfătuit să facă toate calculele justificative; este un bun prilej de a vedea dacă procedeele expuse în secțiunile anterioare au fost corect însuşite!

ii) Diminuăm cererea consumatorului C_1 şi disponibilul furnizorului F_3 cu $100 \cdot \frac{50}{100} = 50$ unități. Rezultă o nouă problemă de transport cu datele din tabelul 8.4

	C_1	C_2	C_3	Disponibil
F_1	2	5	3	50
F_2	4	8	3	150
F_3	7	9	5	100
Cerere	50	150	100	300

Tabelul 8.4

şi cu soluția optimă degenerată

	C_1	C_2	C_3
F_1		50	
F_2	50		100
F_3		100	

Tabelul 8.5

al cărei cost total este de 1650 u.m.Adăugând şi cele 50 unități deja programate pe ruta $F_3 \rightarrow C_1$ obținem programul de transport afişat în tabelul 8.6

	C_1	C_2	C_3
F_1		50	
F_2	50		100
F_3	50	100	

Tabelul 8.6

al cărui cost este de 1650 + 7·50 = 2000 u.m.

iii) Remarcăm faptul că ruta $F_2 \to C_3$ este folosită în ambele soluții optime ale problemei date (în soluția x' din tabelul 8.2 avem $x'_{23} = 50$ iar în soluția x'' din tabelul 8.3, $x''_{23} = 100$) Blocarea rutei se va face schimbând valoarea actuală 3 a costului unitar de transport c_{23} pe această rută cu o valoare M, **foarte mare**, care să oblige algoritmul de optimizare să caute soluții mai ieftine.
Datele problemei modificate sunt afişate în tabelul 8.7

	C_1	C_2	C_3	Disponibil
F_1	2	5	3	50
F_2	4	8	M	150
F_3	7	9	5	150
Cerere	100	150	100	350

Tabelul 8.7

Este clar că orice soluție a problemei originale este o soluție şi pentru problema modificată, diferența apărând la cost.
În consecință vom pleca de la soluția optimă nedegenerată a problemei originale (tabelul 8.2) şi vom recalcula mărimile Δ_{ij}.

	$v_1 = 9 - M$	$v_2 = 9$	$v_3 = 5$
$u_1 = -4$		50	
$u_2 = M - 5$	100		50
$u_3 = 0$		100	50

⇨

$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$		
3 - M	*	- 2
*	M - 4	*
2 - M	*	*

Tabelul 8.8 **Tabelul 8.8.1**

Deoarece M este foarte mare, Δ_{22} = M – 4 > 0 (celelalte diferențe sunt negative). Utilizând ciclul rutei (F_2 , C_2) se ajunge la soluția optimă din tabelul 8.9:

	C_1	C_2	C_3
F_1		50	
F_2	100	50	
F_3		50	100

Tabelul 8.9

cu costul total de 2000 u.m. şi în care ruta $F_2 \to C_3$ nu mai este folosită.

Observație finală: compararea costurilor diferitelor soluții obținute confirmă ideea că orice constrângere asupra rutelor potențiale de transport sau asupra cantităților transportate conduce, în general, la creşterea costului total!

Exemplul 8.2 Companiile farmaceutice A şi B au în stoc 1100 respectiv 900 de mii doze dintr-un vaccin antigripal necesar combaterii unei epidemii de gripă ce este pe cale să se producă în trei oraşe. Deoarece virusul ar putea fi fatal persoanelor în vârstă se impune cu prioritate vaccinarea acestora, în timp ce restul populației va fi vaccinată doar la cerere şi numai în măsura în care mai există doze disponibile.
Estimările necesarului de vaccin – în mii doze – sunt date în tabelul 8.10

	Oraş 1	Oraş 2	Oraş 3
Pentru persoanele în vârstă	325	260	195
Pentru celelalte persoane	750	800	650

Tabel 8.10

Costurile transportului vaccinului de la companiile producătoare în cele trei oraşe (cenți per doză) sunt următoarele:

	Oraş 1	Oraş 2	Oraş 3
Compania A	3	3	6
Compania B	1	4	7

Tabelul 8.11

Cum ar trebui distribuit vaccinul disponibil între cele trei oraşe astfel încât cheltuielile de transport să fie cât mai mici şi populația în vârstă să fie vaccinată în totalitate?

Soluție. Observații preliminare:

Vaccinul este disponibil în 1100 + 900 = 2000 mii doze.
Pentru populația în vârstă din cele trei oraşe sunt necesare 325 + 260 +195 = 780 mii doze.
Pentru ceilalți locuitori ar fi necesare 750 + 800 + 650 = 2200 mii doze.
Pentru aceste persoane nu mai rămân disponibile decât 2000 – 780 = 1220 mii doze adică 55,45% din necesar.

I) Mai întâi vom face repartizarea vaccinului pentru persoanele în vârstă. Avem de rezolvat problema de transport cu datele din tabelul 8.12

	Oraş 1	Oraş 2	Oraş 3	Disponibil (mii doze)
Compania A	3	3	6	1100
Compania B	1	4	7	900
Necesar vaccin pentru persoanele în vârstă (mii doze)	325	260	195	2000 780

Tabelul 8.12

Spre deosebire de problemele de transport discutate în secțiunile precedente, aceasta **nu este echilibrată**. Deoarece

oferta totală = 2000 > 780 = cererea totală

este posibilă satisfacerea tuturor cererilor la cel mai mic cost total de transport. „Echilibrăm” problema introducând un **„consumator fictiv ≡ oraş 4”** care va prelua diferența 2000 – 780 = 1220 mii doze. Costurile unitare de transport către consumatorul fictiv se vor lua egale cu **zero**. În soluția optimă a problemei echilibrate, dozele „livrate” oraşului 4 vor fi interpretate ca doze rămase în stocurile companiilor (şi care vor fi repartizate ulterior populației nevârstnice din cele trei oraşe).
Datele problemei de transport echilibrate sunt indicate în tabelul 8.12.1

	Oraş 1	Oraş 2	Oraş 3	**Oraş 4**	Disponibil
Compania A	3	3	6	**0**	1100
Compania B	1	4	7	**0**	900
Cerere	325	260	195	**1220**	2000

Tabelul 8.12.1

Soluția optimă:

	Oraş 1	Oraş 2	Oraş 3	**Oraş 4**
Compania A		260	195	**645**
Compania B	325			**575**

Tabelul 8.13

se interpretează astfel:

- compania A va livra necesarul de vaccin pentru populația în vârstă din oraşele 2 şi 3 iar compania B va acoperi necesarul de vaccin pentru vârstnicii oraşului 1.
- costul total al operației: $325 \cdot 1 + 260 \cdot 3 + 195 \cdot 6 = 2275$ mii cenți = 22750 dolari.

- pentru restul populației din cele trei orașe rămân disponibile 645 mii doze la compania A și 575 mii doze la compania B.

II) Pentru repartizarea dozelor rămase avem de studiat problema de transport cu datele din tabelul 8.14

	Oraş 1	Oraş 2	Oraş 3	Disponibil (mii doze)
Compania A	3	3	6	645
Compania B	1	4	7	575
Necesar vaccin pentru persoanele nevârstnice (mii doze)	750	800	650	1220 2200

Tabelul 8.14

Şi această problemă este neechilibrată dar, spre deosebire de precedenta, satisfacerea integrală a cererilor este imposibilă întrucât oferta totală = 1220 < 2200 = cererea totală. Totuşi, sitația merită analizată deoarece este foarte apropiată de realitate: nu de puține ori medicamentele disponibile pe piață nu acoperă necesarul!

O primă abordare are în vedere în exclusivitate criteriul costului: unde ar trebui trimise dozele disponibile astfel încât costul total al livrării (suportat de companii) să fie minim?
Echilibrăm problema **„la nivelul cererii”** adăugând un „furnizor fictiv” cu „disponibilul” = 2000 – 1220 = 780 mii doze. Costurile unitare de transport de la acest furnizor fictiv către consumatorii reali se vor lua egale cu zero.În soluția optimă, cantitățile „livrate” de furnizorul fictiv se interpretează ca **cereri neacoperite**.Datele problemei astfel echilibrate apar în tabelul 8.15

	Oraş 1	Oraş 2	Oraş 3	Disponibil
Compania A	3	3	6	645
Compania B	1	4	7	575
Furnizor fictiv	0	0	0	780
Necesar	750	800	650	2200

Tabelul 8.15

Soluția optimă:

	Oraş 1	Oraş 2	Oraş 3
Compania A		645	
Compania B	575		
Furnizor fictiv	175	155	650

Tabelul 8.16

are următoarea interpretare:

- din cele 750 mii doze solicitate de oraşul 1 pentru populația nevârstnică se vor primi numai 575 mii doze, adică întreg stocul companiei B, ceeace reprezintă 76,67% din cerere.
- oraşul 2 va primi întreg stocul de 645 mii doze rămase la compania A reprezentând 80,62% din cererea de 800 mii doze.
- cererea oraşului 3 pentru nevârstnici rămâne în întregime neacoperită.
- costul total al transportării celor 1220 mii doze rămase însumează 575·1 + 645·3 = 2510 mii cenți = 25100 dolari.

Am văzut că pe total, cererea de vaccin pentru populația nevârstnică, este acoperită doar în proporție de 55,45%. Soluția propusă – deşi minimizează costul – are un neajuns major, acela că nu repartizează **echitabil** vaccinul disponibil între cele trei oraşe: în timp ce primele două primesc mai mult de 75% din solicitări, oraşul 3 nu primeşte nimic!

Soluția echitabilă pleacă de la următoarea idee: dacă cererea totală pentru nevârstnici este acoperită în proporție de 55,45% ar fi mai corect ca solicitările individuale ale oraşelor să fie acoperite **în aceeaşi proporție**. Astfel:

oraşul 1 ar urma să primească 750·0,5545 ≅ 416 mii doze;
oraşul 2 ar urma să primească 800·0,5545 ≅ 444 mii doze;
oraşul 3 ar urma să primească 650·0,5545 ≅ 360 mii doze;
Total = 1220 mii doze.

În acest fel, problema de transport se echilibrează **„la nivelul ofertei”** – vezi tabelul 8.17

	Oraş 1	Oraş 1	Oraş 1	Disponibil
Compania A	3	3	6	645
Compania B	1	4	7	575
Necesar	416	444	360	1220

Tabelul 8.17

Soluția optimă:

	Oraş 1	Oraş 2	Oraş 3
Compania A		444	201
Compania B	416		159

Tabelul 8.18

se interpretează astfel:

- cererea diminuată a oraşului 1 este asigurată de compania B (416 mii doze)
- cererea diminuată a oraşului 2 este asigurată de compania A (444 mii doze)
- cererea diminuată a oraşului 3 este asigurată şi de A (201 mii doze) şi de B (159 mii doze)
- costul livrării cantităților specificate în soluție se ridică la

444·3 +201·6 + 416·1 +159·7 = 4067 mii cenți = 40670 dolari, cu 62% mai mult ca în prima abordare.

Dacă adăugăm şi costul livrării vaccinurilor pentru populația vârstnică costul total aferent soluției echitabile este de 22750 + 40670 = 63420 dolari.

Exemplul 8.3 Compania MIKLA produce ciocolată în trei unități F_1, F_2, F_3 specializate în producția de dulciuri. Pentru desfacerea cu amănuntul, ciocolata este transportată în patru centre de distribuție C_1,C_2,C_3,C_4. În luna următoare a fost estimată o cerere de 5300 kg repartizată astfel:

Distribuitor	C_1	C_2	C_3	C_4	Total
Cerere (kg)	900	1400	1800	1200	5300

Tabelul 8.19

În regim normal de activitate , unitățile F_1,F_2,F_3 ar putea produce până la 2000 , 2300 respectiv 1900 kg lunar. Costurile unitare de transport (euro/kg) de la producători la distribuitori sunt date în tabelul 8.20

	C_1	C_2	C_3	C_4
F_1	0,53	0,31	0,12	0,44
F_2	0,35	0,86	0,65	0,78
F_3	0,45	0,64	0,70	0,90

Tabelul 8.20

Compania aprovizionează piața numai prin intermediul celor patru distribuitori asfel că ea nu este interesată în a produce mai mult decât s-a estimat. Pe de altă parte, costurile transportului ciocolatei de la producători la distribuitori este suportat de companie şi inclus în prețul produsului.

i) ce cantități de ciocolată ar urma să fie produse în unitățile F_1,F_2,F_3 astfel ca cererea să fie acoperită la un cost total de transport minim? Cum ar fi repartizată producția pe distribuitori?

ii) Să se arate că prin creşterea capacității de producție a unității F_1 se poate obține o scădere a costului total. Până la ce nivel ar putea creşte producția unității F_1 fără schimbarea structurii actuale a programului de transport?

iii) Coducerea companiei a decis sistarea producției unității F_2 în vederea efectuării unor operații de revizie şi reparație a instalațiilor. Pentru acoperirea cererilor, unitățile F_1 şi F_3 ar putea fi autorizate să producă cu până la 1000 kg peste capacitățile normale, la un cost de 0,21 euro/kg.Ce cantități ar trebui să producă unitățile F_1 şi F_3 pentru satisfacerea tuturor cererilor astfel încât suma costului transportului şi a costului producției suplimentare să fie minimă.

Soluție i) Deoarece

capacitatea totală (normală) de producție = 6200 kg > 5300 kg = cererea totală

unele unități vor produce sub capacitatea normală de producție.
Pentru echilibrarea problemei se va introduce un consumator fictiv C_5 a cărui cerere va fi diferența 6200 – 5300 = 900 kg. Cantitățile repartizate acestui client se interpretează logic drept capacități neutilizate.

Programul de transport cu cel mai mic cost este dat în tabelul 8.21

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5(fictiv)
F_1			1800	200	
F_2	900			1000	400
F_3		1400			500

Tabelul 8.21

După cum se vede, unitatea F_1 va lucra la capacitate normală în timp ce F_2 şi F_3 vor produce 1900 kg respectiv 1400 kg. Costurile de transport însumează 2295 euro.

ii) Suplimentăm capacitatea normală de producție a unității F_1 cu o valoare $y > 0$, deocamdată foarte mică. Producțiile unităților F_2 şi F_3 se mențin la valorile stabilite la 1), adică 1900 kg respectiv 1400 kg. Rezultă următoarea soluție optimă

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5(fictiv)
F_1			1800	$200 + y$	
F_2	900			$1000 - y$	y
F_3		1400			

Tabelul 8.22

cu costul total = $2295 + 0{,}44y - 0{,}78y = 2295 - 0{,}34y$. Prin urmare costul total scade cu 0,34 euro la fiecare kg de produs fabricat în unitatea F_1 peste capacitatea normală.Creşterea producției unității F_1 implică şi diminuarea aportului unității F_2 cu aceeaşi valoare y. Condiția de nenegativitate $1000 - y \geq 0$ arată că structura actuală a programului de transport (adică cine pe cine aprovizionează!) se menține dacă $y \leq 1000$ adică atât timp cât producția unității F_1 nu depăşeşte nivelul 2000 + 1000 = 3000 kg.La nivelul maxim de 3000 kg pentru F_1, aportul unității F_2 scade la 900 kg în timp ce F_3 va contribui cu aceeaşi cantitate de 1400 kg. Repartizarea acestor producții pe distribuitori este dată în tabelul 8.22.1 (rezultat din tabelul 8.22 pentru y = 1000).

	C_1	C_2	C_3	C_4
F_1			1800	1200
F_2	900			
F_3		1400		

Tabelul 8.22.1

iar costul transportului ar scădea la $2295 - 0{,}34 \cdot 1000 = 1955$ euro.

Notă: în analiza făcută nu s-a ținut seama de eventualele costuri suplimentare cauzate de depăşirea capacitățiii normale de producție a unității F_1.

iii) Producțiile suplimentare ale unităților F_1 şi F_3 vor fi evidențiate prin doi noi „furnizori F_1^{supl} şi F_3^{supl} fiecare cu o „ofertă" de 1000 kg. Costurile unitare de transport de la F_1^{supl} şi F_3^{supl} către cei patru distribuitori vor include şi costul suplimentar de producție de 0,21 euro/kg.
Oferta totală a celor patru furnizori F_1 , F_1^{supl} , F_3 , F_3^{supl} depăşeşte cererea totală

$$2000 + 1000 + 1900 +1000 = 5900 > 5300$$

astfel că, pentru echilibrare, vom apela din nou la un distribuitor fictiv C_5 cu cererea 5900 – 5300 = 600 kg. Cantitățile „livrate" lui C_5 se vor interpreta logic drept capacități – normale sau suplimentare – neutilizate.
De obicei, costurile unitare de transport către un consumator fictiv se iau egale cu zero.În cazul de față apare următoarea problemă: nu putem admite o producție suplimentară fără utilizarea integrală a capacităților normale de producție!
Ca urmare, costurile unitare de transport de la F_1 şi F_3 la C_5 vor fi luate egale cu o valoare M > 0 foarte mare; în acest fel, algoritmul de optimizare va fi „obligat" să utilizeze mai întâi capacitățile normale de producție – care, oricum nu acoperă cererea totală: 2000 + 1900 = 3900 < 5300 – şi numai după aceea capacitățile suplimentare!
În definitiv, avem de rezolvat următoarea problemă de transport echilibrată:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5 (fictiv)	Capacități de producție
F_1	0,53	0,31	0,12	0,44	M	2000
F_1^{supl}	0,53 + 0,21 = 0,74	0,31 + 0,21 = 0,52	0,12 + 0,21 = 0,33	0,44 + 0,21 = 0,65	0	1000
F_3	0,45	0,64	0,70	0,90	M	1900
F_3^{supl}	0,45 + 0,21 = 0,66	0,64 + 0,21 = 0,85	0,70 + 0,21 = 0,91	0,90 + 0,21 = 1,11	0	1000
Cerere	900	1400	1800	1200	600	5900

Tabelul 8.23

cu soluția optimă:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5 (fictiv)
F_1		200	1800		
F_1^{supl}				1000	
F_3	900	1000			
F_3^{supl}		200		200	600

Tabelul 8.24

Interpretare: Capacitățile normale ale unităților F_1 şi F_3 vor fi suplimentate cu 1000 kg respectiv 400 kg.. Oprirea producției la unitatea F_2 implică un cost total de 2365 euro din care 2071 reprezintă costul propriu zis al transportului iar 294 costul producției suplimentare.

Exemplul 8.4 Firma de panificație LIPIA produce o sortiment de franzelă în două brutării.Datele privitoare la capacitățile şi costurile de producție se găsesc în tabelul 8.25

Brutăria	Capacitate de producție (buc)	Cost de producție (cenți/buc)
A	2500	23
B	2100	25

Tabelul 8.25

Patru lanțuri de restaurante sunt gata să cumpere acest sortiment. Cantitățile cerute şi prețurile pe care sunt dispuse să le plătească sunt date în tabelul 8.26

Lanț de restaurante	Cerere maximă (buc)	Preț oferit (cenți/buc)
1	1800	29
2	2300	37
3	550	40
4	1750	36

Tabelul 8.26

Costul transportului pâinii de la brutărie la restaurante(în cenți/buc) intră în obligația firmei – vezi tabelul 8.27

	Lanț 1	Lanț 2	Lanț 3	Lanț 4
A	6	8	11	9
B	12	6	8	6

Tabelul 8.27

Se observă că sortimentul de pâine este bine apreciat întrucât cererea:

$$1800 + 2300 + 550 + 1750 = 6400 \text{ bucăți}$$

depăşeşte oferta:

$$2500 + 2100 = 4600 \text{ bucăți}$$

Problema: către care clienți ar trebui să se îndrepte firma şi ce cantități de pâine ar trebui să le livreze pentru ca profitul ei să fie maxim.

Soluție. Profitul firmei pe unitatea de produs este dat de relația:

$$\begin{array}{c}\text{Profit per} \\ \text{bucată}\end{array} = \begin{array}{c}\text{Preț oferit de} \\ \text{restaurant}\end{array} - \left(\begin{array}{c}\text{Cost de producție la} \\ \text{brutărie}\end{array} + \begin{array}{c}\text{Costul transportului de la} \\ \text{brutărie la restaurant}\end{array}\right)$$

Prin urmare, acest profit depinde atât de „furnizor” (brutăria A sau B) cât si de „consumator” (lanțul 1, 2 , 3 sau 4). Calculul acestor „profituri unitare” este dat în tabelul 8.28

	Lanț 1	Lanț 2	Lanț 3	Lanț 4
Brutăria A	39 – 23 – 6 = 10	37 – 23 - 8 = 6	40 – 23 – 11 = 6	36 – 23 – 9 = 4
Brutăria B	39 – 25 – 12 = 2	37 – 25 – 6 = 6	40 – 25 – 8 = 7	36 – 25 – 6 = 5

Tabelul 8.28

Să considerăm acum problema optimizării transportului pâinii de la cei doi furnizori (brutăriile) la cei patru consumatori (lanțurile de restaurante) în care, în locul costurilor unitare de transport, avem „profiturile unitare" rezultate din aceste livrări, obiectivul urmărit fiind maximizarea profitului. Datele problemei se găsesc în tabelul 8.29

	Lanț 1	Lanț 2	Lanț 3	Lanț 4	Oferta (buc)
Brutăria A	10	6	6	4	2500
Brutăria B	2	6	7	5	2100
					4600
Cerere (buc)	1800	2300	550	1750	6400

Tabelul 8.29

Pentru „echilibrarea" problemei vom adăuga o „brutărie fictivă" a cărei „ofertă" este diferența

6400 – 4600 = 1800 bucăți

Profiturile corespunzătoare franzelelor „livrate" de furnizorul fictiv se vor lua egale cu zero – vezi tabelul 8.30

	Lanț 1	Lanț 2	Lanț 3	Lanț 4	Oferta (buc)
Brutăria A	10	6	6	4	2500
Brutăria B	2	6	7	5	2100
Brutăria fictivă	0	0	0	0	1800
Cerere (buc)	1800	2300	550	1750	6400

Tabelul 8.30

Evident, cel mai mare profit per bucată rezultă din livrările brutăriei A către lanțul 1 de restaurante. Dacă pe fiecare rută „brutărie – restaurant" vom evalua diferența dintre profitul maxim şi profitul aferent rutei respective şi dacă vom interpreta aceste diferențe ca „pierderi de profit" obținem o problemă de transport uzuală (în care funcția obiectiv se minimizează) cu datele din tabelul 8.31

	Lanț 1	Lanț 2	Lanț 3	Lanț 4	Oferta (buc)
Brutăria A	0	4	4	6	2500
Brutăria B	8	4	3	5	2100
Brutăria fictivă	10	10	10	10	1800
Cerere (buc)	1800	2300	550	1750	6400

Tabelul 8.31

Soluția optimă a problemei este dată în tabelul 8.32

	Lanț 1	Lanț 2	Lanț 3	Lanț 4
Brutăria A	1800	700		
Brutăria B		1550	550	
Brutăria fictivă		50		1750

Tabelul 8.32

şi se interpretează astfel:

- se acceptă integral cererea lanțului 1 de restaurante; ea va fi asigurată de brutăria A;
- se acceptă integral cererea lanțului 3 de restaurante; ea va fi asigurată de brutăria B;
- pentru lanțul 2 de restaurante se asigură 2250 bucăți; 700 vor veni de la brutăria A şi 1550 de la brutăria B;
- nu se acceptă oferta de preț a lanțului 4 de restaurante.

Profitul maxim = $1800 \cdot 10 + 700 \cdot 6 + 1550 \cdot 6 + 550 \cdot 7 = 35350$ cenți = 353,50 dolari.

Exemplul 8.5 O firmă specializată în producerea de echipament electric are de expediat un număr de generatoare la sfârşitul lunilor Ianuarie, Februarie şi Martie. În fiecare lună, firma produce, în regim normal de lucru, un anumit număr de generatoare. Dacă necesitățile o impun, prin organizarea unor schimburi prelungite, firma poate produce şi peste plafoanele normale dar la un cost mai ridicat.

Luna	Ianuarie	Februarie	Martie
Nivelul cererii (buc.)	8	6	12
Volumul producției în regim normal de lucru (buc.)	7	7	7
Volumul producției suplimentare (buc.)	4	4	5
Costul unui generator din producția normală (u.m.)	40	40	50
Costul unui generator din producția suplimentară (u.m.)	50	60	80

Tabelul 8.33

După cum se vede, în luna Martie, când cererea este mai mare şi costurile de producție sunt mai mari, ca urmare a unor tendințe inflaționiste ce pot fi previzionate din vreme: creşteri planificate ale salariilor sau creşterea prețurilor la materiile prime.

Deoarece costurile de producție nu sunt constante, firma va fi interesată în a produce mai mult în lunile în care costurile sunt mai mici formând astfel un stoc de produse finite din care să acopere, cel puțin în parte, cererea din lunile în care costurile sunt mai mari. Pentru fiecare generator expediat în altă lună decât cea în care a fost produs, există un cost suplimentar de stocare de 10 u.m. pe lună.

Obiectivul urmărit este elaborarea unui program de fabricație pentru satisfacerea comenzilor la un cost total de producție şi stocare minim.

Pentru a formula o problemă de transport trebuie să identificăm mai întâi sursele şi destinațiile. În fiecare lună un generator poate fi produs în două moduri: în timpul normal de lucru sau "peste program"; vor exista deci 2×3 = 6 "surse" ale căror disponibile sunt nivelele de producție corespunzătoare. Astfel, sursa **"Ianuarie-producție normală"** are un disponibil de 7 bucăți în timp ce sursa **"Martie-producție suplimentară"**are un disponibil de 5 bucăți. Destinațiile se identifică cu sfârşiturile celor trei luni când cererile trebuiesc acoperite.

Între cele 6 surse şi 3 destinații se creează 6×3 = 18 legături (rute); fiecare indică luna în care este produs un generator, modul în care acesta este produs (în regim normal de lucru sau "peste program") şi luna în care este expediat. Din cele 18 legături, 6 vor fi blocate deoarece exprimă un nonsens: livrarea unui produs finit într-o lună anterioară celei în care a fost fabricat!

Costurile unitare de transport pe rutele neblocate sunt în fapt costurile unitare de producție la care se adaugă eventualele cheltuieli de stocare. Astfel, pe ruta **"Ianuarie-producție suplimentară→ Martie"** costul unitar de transport va fi egal cu costul fabricării unui generator peste nivelul producției normale din Ianuarie la care se adaugă costul stocării pe două luni, adică 50+2×10 = 70 u.m.

Am obținut o problemă de transport ale cărei date sunt prezentate în tabelul 8.34

Destinații / Surse	Ianuarie	Februarie	Martie	Disponibil
Ian.-prod. normală	40	50	60	7
Ian.-prod, suplim.	50	60	70	4
Feb.-prod. normală	M	40	50	7
Feb.-prod. suplim.	M	60	70	4
Martie-prod. normală	M	M	50	7
Martie-prod. suplim.	M	M	80	5
Cerere	8	6	12	34 / 26

Tabelul 8.34

Deoarece oferta totală întrece cererea totală (34 > 26) este necesar să echilibrăm problema introducând un "consumator "fictiv care să preia diferența 34 - 26 = 8 buc.

Invităm cititorul să rezolve problema echilibrată, avertizându-l că aceasta are mai multe soluții optime! Una dintre ele este interpretată în figura 8.1; costul asociat este de 1250 u.m.

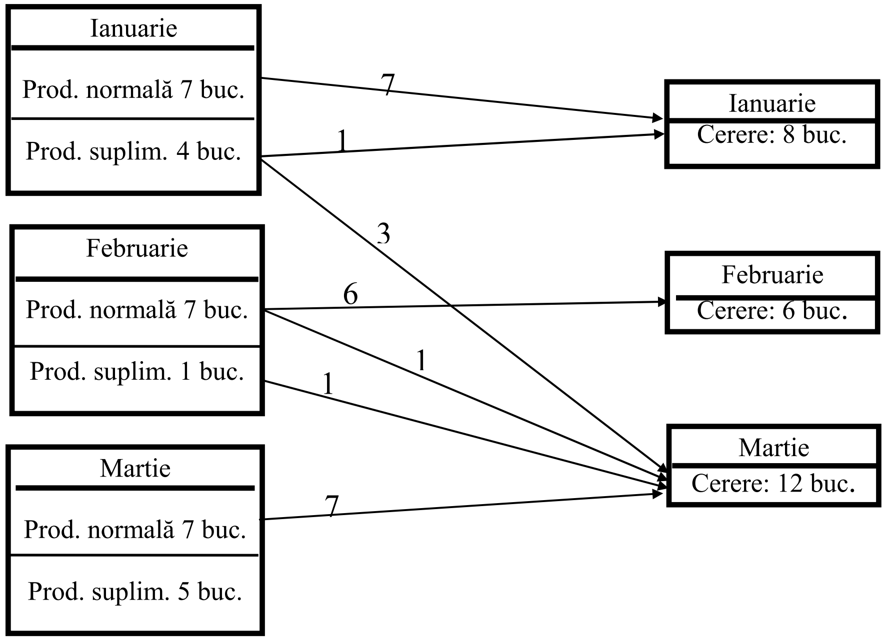


Figura 8.1

Exemplul 8.6 Foarte des citată în literatura de specialitate este **problema patronului de restaurant.**

Patronul unui restaurant ştie că în raport cu mesele pe care a stabilit să le servească în următoarele *n* zile (în regim de rezervare) va avea nevoie de r_i şervete de masă curate, $i = 1,...,n$. Pentru procurarea acestor şervete el are la dispoziție două posibilități:

- fie să le cumpere la prețul de *a* u.m. bucata;
- fie să trimită şervetele murdare la o spălătorie. În serviciul normal, şervetele spălate sunt livrate după *p* zile la un cost de *c* u.m. bucata; în serviciul de urgență, şervetele spălate se livrează după $q < p$ zile la un cost $b > c$ u.m. bucata.

Pornind fără nici un şervet utilizabil, cum trebuie să procedeze patronul cu achiziționarea şi spălarea şervetelor astfel încât să minimizeze costul total pe perioada celor n zile?

Soluție: Pentru a trata problema enunțată ca o problemă de transport este necesar să identificăm: **1)** produsul ce trebuie "transportat şi distribuit", **2)** sursele, **3)** destinațiile, **4)** legăturile (rutele) permise între surse şi destinații şi **5)** costurile unitare de transport.

1) Produsul de transportat şi distribuit îl constituie şervetele "curate". După proveniență ele sunt de trei feluri: şervete "noi" cumpărate de la magazin, şervete "spălate în regim de urgență" şi şervete "spălate în regim normal".

2) Evident o primă sursă de şervete curate o constituie stocul de şervete noi pe care patronul **intenţionează** să le cumpere de la magazin; notăm această sursă cu F_0. Deoarece, la urma urmei, fiecare şervet spălat a fost cândva nou este clar că la începutul perioadei patronul nu poate cumpăra mai puţine şervete decât numărul maxim necesar într-o zi. Pe e altă parte, patronul poate cumpăra în fiecare zi numărul de şervete curate necesare.În concluzie, numărul S al şervetelor din stocul iniţial F_0 **va trebui fixat** undeva între limitele specificate în următoarea inegalitate:

$$\max_{1 \le i \le n} r_i \le S \le \sum_{i=1}^{n} r_i \qquad (1)$$

Mai departe, la sfârşitul unei zile, să zicem i, **cele r_i şervete murdare se constituie ca o sursă de şervete curate pentru zilele următoare** (fireşte, după ce în prealabil au fost spălate!).Face excepţie ultima zi, a n-a, cînd şervetele murdare se aruncă pur şi simplu la deşeuri (se face ipoteza că în perioada următoare, patronul va utiliza alt stoc de şervete noi...).În consecinţă, pe lîngă "sursa" F_0, vom mai considera alte n - 1 "surse" $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$, corespunzătoare zilelor 1, 2,..., n-1, cu "disponibilele" $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$.

3) Este firesc ca **fiecare din cele n zile să fie socotită ca o destinaţie** a cărei cerere este egală cu numărul şervetelor curate necesare.Vom avea deci n destinaţii $C_1, C_2, \ldots, C_n$, corespunzătoare zilelor 1, 2,..., n cu cererile $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Datorită relaţiei (1) "oferta" totală de şervete curate acoperă cererea totală:

$$S + r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} \ge r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} + r_n \quad \Leftrightarrow \quad S \ge r_n$$

Dacă $S = r_n$ (care are loc numai dacă $r_n = \max_{1 \le i \le n} r_i$), problema este din start echilibrată; dacă $S > r_n$, vom introduce o destinaţie suplimentară C_0 cu cererea $S - r_n$. Situaţia şervetelor cu "destinaţia" C_0 se interpretează diferit: acelea care "provin" de la sursa F_0 reprezintă şervete pe care patronul intenţiona să le cumpere dar a renunţat deoarece nu mai avea nevoie de ele; cele care provin de la oricare din sursele $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ reprezintă şervete murdare care nu mai sunt trimise la spălat fiind aruncate la deşeuri.

4,5) Având în vedere semnificaţia ei, sursa F_0 este legată de toate destinaţiile $C_1, C_2, \ldots, C_n$, "costul unitar" comun pe aceste rute fiind preţul de cumpărare al unui şervet nou. Să considerăm acum o sursă oarecare F_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, al cărei "disponibil" este format din cele r_i şervete folosite în ziua i. Aceste şervete, sau o parte din ele, devin disponibile pentru o nouă folosire abia după q zile, adică după ce au fost trimise la spălătoria rapidă. În concluzie, "rutele" (F_i, C_j) cu $1 \le j < i + q$ sunt lipsite de sens şi vor fi **blocate** printr-un cost M foarte mare. Pe rutele (F_i, C_j) cu $i + q \le j < i + p$ se va "practica" costul b al spălării unui şervet în regim de urgenţă iar pe rutele (F_i, C_j) cu $i + p \le j \le n$, se va practica costul c al spălării unui şervet în regim normal. În fine, sunt permise toate rutele către destinaţia C_0 - în caz că aceasta trebuie avută în vedere! - cu costul comun zero.

Considerațiile precedente sunt ilustrate prin următorul caz concret:

$n = 5$ zile

ziua i	1	2	3	4	5
cererea r_i	60	50	80	40	60

prețul unui şervet nou: $a = 5$
durata serviciului normal: $p = 2$ zile
durata serviciului rapid: $q = 1$ zi
costul spălării unui şervet în regim de urgență: $b = 2$ u.m.
costul spălării unui şervet în regim normal: $c = 1$ u.m.

Din (1) rezultă că $80 \leq S \leq 280$. În tabelul 8.35 apar datele problemei de transport corespunzătoare.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_0	Disponibil
F_0	5	5	5	5	5	0	S
F_1	M	2	1	1	1	0	60
F_2	M	M	2	1	1	0	50
F_3	M	M	M	2	1	0	80
F_4	M	M	M	M	2	0	40
Necesar	60	50	80	40	50	S - 50	S + 230

Tabelul 8.35

Problema are mai multe soluții optime; structura unora depinde de numărul S de şervete noi pe care patronul **intenționează** să le cumpere la început! Invităm cititorul să facă calculele necesare. Oricare din aceste soluții implică un cost total de 730 u.m. a cărui structură va fi detaliată pe soluția din tabelul 8.36

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_0
F_0	60	20				S - 80
F_1		30	30			
F_2			50			
F_3				40	40	
F_4					10	30

Tabelul 8.36

Din prima linie a tabelului 8.36 rezultă că patronul va trebui să cumpere 80 de şervete noi: 60 vor fi folosite în prima zi, restul a doua zi.Din a doua linie rezultă că 30 din şervetele folosite în prima zi vor fi trimise la spălătoria rapidă pentru a fi disponibile a doua zi. Restul de 30 vor fi spălate în regim normal pentru a fi folosite în ziua a treia ş.a.m.d. Ultima linie arată că din cele 40 de şervete întrebuințate în a patra zi, 10 vor fi spălate rapid, pentru a putea fi folosite a doua zi iar celelalte 30 vor fi aruncate la deşeuri (acolo unde vor ajunge şi cele 50 de şervete "murdărite" în ultima zi).

Tabelul poate fi "citit şi pe coloane". Astfel din coloana a treia deducem că necesarul de şervete pentru a treia zi este asigurat prin spălarea în regim normal a 30 şervete folosite în prima zi şi prin spălarea în regim de urgență a celor 50 de şervete folosite în a doua zi.

8.2 Problema transferului

În problema de transport studiată în secțiunile precedente, sursele erau în legătură directă cu destinațiile, rutele erau orientate de la surse către destinații şi nu era permis nici un transfer între două surse sau între două destinații – vezi rețeaua din figura 7.1 din secțiunea 7.2 (unitatea de învățare 7).

Problema transferului este o generalizare a problemei de transport în următoarele direcții:

- în rețeaua asociată există şi centre intermediare (de tranzit) şi pot exista legături între surse sau între destinații. Ca urmare, este posibil ca o sursă (o destinație) să funcționeze la un moment dat şi ca punct de tranzit pentru unități de produs provenind de la o altă sursă (care se deplasează către o altă destinație)
- pe unele rute transporturile pot fi efectuate în ambele sensuri, costul unitar al transportului putând depinde de sensul de parcurgere al rutei.

Exemplul 8.7. Două uzine de automobile s_1 şi s_2 sunt în legătură cu trei distribuitori t_1, t_2 şi t_3 prin intermediul a două locații de tranzit i_1 şi i_2 . Rețeaua rutelor de legătură între cele şapte locații este dată în figura 8.2. Oferta uzinelor s_1 şi s_2 este de 1000 respectiv 1200 unități. Dealerii t_1, t_2 şi t_3 solicită 800 , 900 respectiv 500 unități. Costurile de transport per unitate (în sute dolari) sunt indicate pe muchiile rețelei. De remarcat că transferurile între centrele intermediare sau între distribuitori pot fi efectuae în ambele sensuri.

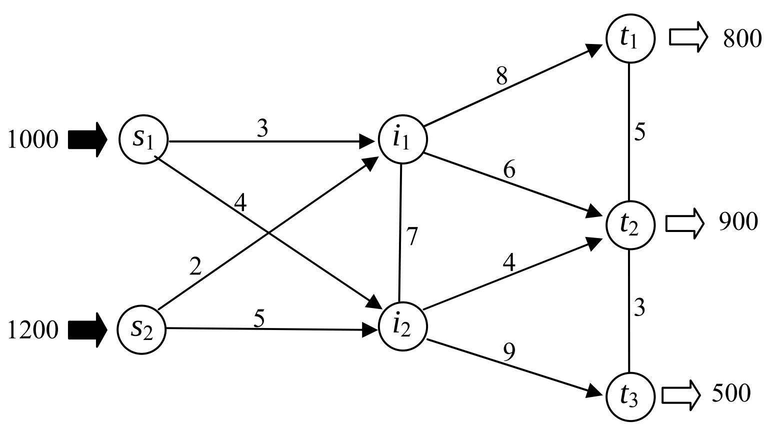


Figura 8.2

Se constată că oferta totală = 2200 unități = cererea totală.
Se pune problema organizării livrărilor astfel încât costul total al transportului să fie minim.

Modelul matematic al problemei transferului.

Problema transferului se poate descrie în următorii termeni. Există n localități 1,2,..,n şi se pune problema organizării transportului unui anumit produs între aceste localități la un cost total minim.Între unele localități există legături directe numite rute. Pe fiecare rută este precizat un cost al transportului unei unități de produs de la o extremitate la cealaltă. Este posibil ca aceste costuri unitare(ce pot fi exprimate în bani, timp sau distanță) să depindă de sensul de parcurgere a rutei respective. Pentru simplifificarea expunerii se va presupune că între oricare două localități i şi j există o legătură directă, convenind că dacă o asemenea rută sau sens de parcurgere nu există în realitate, costul corespunzător să fie luat egal cu $+ \propto$. Ansamblul localităților şi al rutelor de legătură poartă numele de **rețea de transport**.

Nodurile rețelei se împart în:

- **surse** sau centre furnizoare: localități în care produsul este realizat în vederea transportării în alte locații (eventualul consum local se presupune acoperit).
- **destinații** sau centre consumatoare: localități în care produsul este cerut pentru consum, cererea neputând fi acoperită din producția locală.
- **centre intermediare** (de tranzit): localități în care produsul se găseşte doar în trecere, eventualul consum fiind asigurat din producția locală.

Introducem notațiile:

$a_i \equiv$ cantitatea disponibilă în locația i spre a fi transportată în alte locații. Evident $a_i > 0$ dacă locația i este o sursă şi $a_i = 0$ în rest.

$b_i \equiv$ cantitatea de produs solicitată pentru consum în locația i. Dacă i este o destinație atunci $b_i > 0$; în rest $b_i = 0$.

c_{ij}, unde $i \neq j$, $\equiv$ costul transportului unei unități de produs da la locația i la locația j.Vom presupune că $c_{ij} \geq 0$ şi că $c_{ij} = +\infty$ dacă deplasarea de la i la j nu este posibilă în realitate. Pentru simplificarea notațiilor punem $c_{ii} = 0$.

x_{ij} ($i \neq j$) $\equiv$ cantitatea de produs transportată din locația i în locația j.Dacă transportul de la i la j nu este permis, condiția $c_{ij} = +\infty$ va implica $x_{ij} = 0$ în orice soluție admisibilă a modelului.

$\widetilde{x}_{ii}$, $i = 1,\cdots,n$ cantitatea de produs aflată în tranzit în locația i (adică primită din unele locații pentru a fi expediată în altele)

Cu aceste notații putem ataşa fiecărei locații a rețelei de transport următoarele relații:

Totalul cantităților expediate din locația i	−	Cantitatea aflată în tranzit în locația i	=	Producția netă în locația i (disponibilă pentru a fi expediată spre alte locații)

Formal:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} x_{ik} - \tilde{x}_{ii} = a_i \quad i = 1,\cdots,n \tag{1}$$

Totalul cantităților ajunse în locația *i* − Cantitatea aflată în tranzit în locația *i* = Consum net în locația *i*

Formal:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} x_{ki} - \tilde{x}_{ii} = b_i \quad i = 1,\cdots,n \tag{2}$$

Variabilele x_{ij} , $i \neq j$ şi $\tilde{x}_{ii}$ nu pot lua decât valori nenegative:

$$x_{ij} \geq 0 \quad , \quad \tilde{x}_{ii} \geq 0 \tag{3}$$

Costul transporturilor efectuate între cele *n* locații este reprezentat prin următoarea funcție ce trebuie minimizată:

$$(\min) f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{4}$$

(reamintim că $c_{ii} = 0$, $i = 1,\cdots,n$)
Ansamblul de relații (1) – (4) constituie modelul matematic al problemei transferului.Este uşor de văzut că problema de optimizare astfel definită este compatibilă dacă şi numai dacă totalul L al cantităților expediate din surse este egal cu totalul cantităților cerute în destinații, adică:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = L \tag{5}$$

Reducerea problemei transferului la o problemă clasică de transport

Observând că, în nici o locație a rețelei, cantitatea tranzitată nu poate depăşi plafonul L definit în (5), introducem variabilele nenegative:

$$x_{ii} = L - \tilde{x}_{ii} \quad i = 1,\cdots,n$$

Substituind:

$$\tilde{x}_{ii} = L - x_{ii} \tag{6}$$

în ecuațiile (1) şi (2), modelul problemei transferului (1) – (4) se reduce la problema de transport echilibrată:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_{ik} = L + a_i \quad i = 1, \cdots, n \\ \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = L + b_i \quad i = 1, \cdots, n \\ \quad x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, \cdots, n \\ (\min) f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \end{cases} \tag{7}$$

După rezolvarea problemei (7) relația (6) ne permite să punem în evidență cantitățile aflate în tranzit în diferitele locații ale rețelei.

Determinăm soluția optimă a problemei transferului dată în exemplul 8.7 Condiția de compatibilitate (5) este îndeplinită cu L = 2200. Datele numerice ale problemei de transport (7) apar în tabelul 8.37. Blocarea rutelor nepermise s-a făcut cu un cost $M > 0$ foarte mare.

	s_1	s_2	i_1	i_2	t_1	t_2	t_3	**Disponibil L+a_i**
s_1	0	M	3	4	M	M	M	3200=2200+1000
s_2	M	0	2	5	M	M	M	3400=2200+1200
i_1	M	M	0	7	8	6	M	2200
i_2	M	M	7	0	M	4	9	2200
t_1	M	M	M	M	0	5	M	2200
t_2	M	M	M	M	5	0	3	2200
t_3	M	M	M	M	M	3	0	2200
Cerere L+b_i	2200	2200	2200	2200	3000=2200+800	3100=2200+900	2700=2200+500	9600

Tabelul 8.37

Aplicarea algoritmului de optimizare a condus la soluția afişată în tabelul 8.38

	s_1	s_2	i_1	i_2	t_1	t_2	t_3
s_1	2200			1000			
s_2		2200	1200				
i_1			1000		800	400	
i_2				1200		1000	
t_1					2200		
t_2						1700	500
t_3							2200

Tabelul 8.38

Cantitățile $\widetilde{x}_{ii}$ aflate în tranzit , calculate cu relația (6) şi cantitățile x_{ij} , $i \neq j$ transportate pe rutele permise sunt indicate în tabelul 8.39. În figura 8.3 sunt puse în evidență rutele efectiv folosite în programul de transport optim şi sensurile deplasărilor.

	s_1	s_2	i_1	i_2	t_1	t_2	t_3
s_1				1000			
s_2			1200				
i_1			**1200**		800	400	
i_2				**1000**		1000	
t_1							
t_2						**500**	500
t_3							

Tabelul 8.39

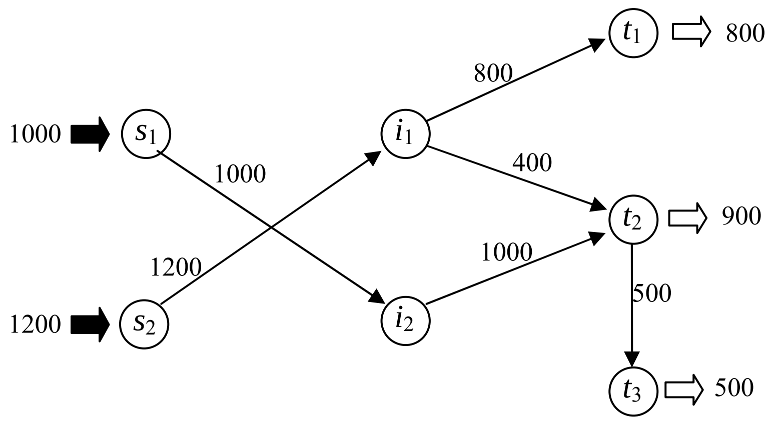


Figura 8.3

De remarcat dubla calitate a locației t_2: destinație şi punct de tranzit. În t_2 sosesc 400 + 1000 = 1400 unități; 900 unități sunt reținute pentru acoperirea cererii iar celelalte 500 sunt trimise la t_3.

Probleme propuse

1. Patru termocentrale C_1 , C_2 , C_3 , C_4 se aprovizionează cu cărbune de la trei mine F_1 , F_2 , F_3 . Necesarul lunar al termocentralelor (mii t), producțiile lunare ale minelor (mii t) şi costurile unitare de tranport (u.m. la 1000t) sunt date tabelul 8.40

Termocentrale / Mine	C_1	C_2	C_3	C_4	Producție lunară (mii t)
F_1	3	2	1	5	12
F_2	4	3	7	2	18
F_3	3	3	5	6	20
Necesar lunar (mii t)	10	11	14	15	50

Tabelul 8.40

1) Să se genereze programe inițiale de transport prin metoda costului minim şi prin metoda diferențelor maxime; să se compare costurile totale de transport aferente soluțiilor.

Să se determine programul lunar de aprovizionare cu cărbune a termocentralelor care minimizează costul total al transportului.

2) Pentru următoarea lună, unele sindicate miniere preconizează o serie de acțiuni greviste. Ca urmare a acestora, se estimează că producția lunară totală de cărbune va scădea cu 30% fiind repartizată astfel; 10 mii t la mina F_1 , 12 mii t la F_2 şi 13 mii t la F_3 , deci un total de 35 mii t față de o cerere de 50 mii t.
Studiați posibilitățile de repartizare a producției diminuate.

2. Compania X produce unitatea centrală pentru un anumit tip de PC. Unitatea este produsă în fabricile situate în locațiile F_1 , F_2 , F_3 (Seattle, Columbus, NY). Desfacerea este asigurată prin cinci mari depozite situate în locațiile C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 (Pittsburg, Mobile, Denver, LA, Washington). Oferta şi cererea trimestrială precum şi costurile unitare de transport (dolari/unitate) sunt date în tabelul 8.41

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Producție trim.
F_1	10	20	5	9	10	9000
F_2	2	10	8	30	6	4000
F_3	1	20	7	10	4	8000
Cerere trim.	3000	5000	4000	6000	3000	21000

Tabelul 8.41

i) Determinați programul de transport care minimizează costul total.

ii) Depozitul C_1 a solicitat o suplimentare de 1000 unități iar conducerea a autorizat fabrica din F_2 să mărească producția cu încă 1000 unități. Cercetați dacă această modificare va duce la creşterea costului total.

Indicație: Modificați:

- disponibilul furnizorului F_2: $a_2 = 4000 + x$
- cererea consumatorului C_1: $b_1 = 3000 + x$

cu $x \geq 0$ foarte mic, deocamdată.Determinați soluția optimă a problemei de transport modificate şi calculați costul total aferent acesteia.

3. Compania X este specializată în producția unui anumit tip de generatoare electrice. Ea are trei fabrici situate în localitățile F_1 , F_2 , F_3 şi îşi desface producția prin patru centre regionale situate în localitățile C_1 , C_2 , C_3 , C_4. Costurile de producție sunt aceleaşi indiferent de fabrica producătoare. Pentru următorul trimestru, capacitățile de producție planificate sunt date în tabelul 8.42 iar cererile previzionate sunt indicate în tabelul 8.43. Costurile unitare de transport pe cele $3 \times 4 = 12$ rute posibile sunt date în tabelul 8.44

Fabrica	Capacitate de producție(unități)
F_1	5000
F_2	6000
F_3	2500
Total	13500

Tabelul 8.42

Centru de distribuție	Cerere previzionată (unități)
C_1	6000
C_2	4000
C_3	2000
C_4	1500
Total	13500

Tabelul 8.43

	C_1	C_2	C_3	C_4
F_1	3	2	7	6
F_2	7	5	2	3
F_3	2	5	4	5

Tabelul 8.44

i) Determinați un program pentru satisfacerea cererilor la cel mai mic cost total de transport.

ii) Experții companiei sunt de părere că o diminuare a capacității de producție planificate la fabrica F_2 compensată de o creştere – în aceeaşi măsură – a producției la fabrica F_3 duce la scăderea costului total al transportului. Confirmați această părere? Cu cât scade costul total de transport dacă creşterea producției la F_3 nu depăşeşte 10% din capacitatea planificată actuală?

4. O companie produce un singur bun în trei fabrici şi are patru clienți. În următoarea perioadă cele trei fabrici vor produce 6 , 8 respectiv 4 unități. Compania s-a angajat să vândă 4 unități clientului 1, 6 unități clientului 2 şi cel puțin 2 unități clientului 3. Mai mult, clienții 3 şi 4 vor să cumpere cât mai mult din ceeace se produce. Profitul net rezultat din vânzarea unei unități de produs de la fabrica $i = 1,2,3$ la clientul $j = 1,2,3,4$ este dat în tabelul 8.45

		Client			
		1	2	3	4
Fabrica	1	8	7	5	2
	2	5	2	1	3
	3	6	4	3	5

Tabelul 8.45

Conducerea companiei doreşte să ştie câte unități să vândă clienților 3 şi 4 şi cum trebuie făcută livrarea produsului de la fabrici la clienți pentru ca profitul ei să fie maxim.

i) modelați situația descrisă ca o problemă de transport precizând furnizorii şi ofertele lor, consumatorii şi cererile lor şi costurile unitare de transport de la furnizori la consumatori.

ii) determinați soluția optimă.

Indicație:

- furnizor ≡ fabrică; disponibilul unui furnizor ≡ producția planificată : $a_1 = 6, a_2 = 8, a_3 = 4$

- consumator ≡ client. Cererile clienților 1 şi 2 sunt cunoscute: $b_1 = 4, b_2 = 6$; ele însumează 4 + 6 = 10 unități. Cererile clienților 3 şi 4 nu sunt cunoscute; ştim doar că ei doresc să cumpere cât mai mult. Totuşi, ei nu pot cumpăra mai mult decât ceeace rămâne după satisfacerea comenzilor clienților 1 şi 2 de unde $b_3 + b_4 = 18 - 10 = 8$ unități. În plus, $b_3 \geq 2$. În concluzie, putem presupune că cererile clienților 3 şi 4 au forma $b_3 = 2 + r$ şi $b_4 = 8 - b_3 = 6 - r$ cu $0 \leq r \leq 6$.

- Obiectivul urmărit este maximizarea profitului total reprezentat de funcția $P = \sum_{i,j} p_{ij} x_{ij}$ unde x_{ij} este cantitatea livrată de fabrica i clientului j iar p_{ij} este profitul companiei per unitate. Fie

$$p^* = \max_{i,j} p_{ij} = p_{11} = 8 \text{ şi } c_{ij} = p^* - p_{ij}$$

Deoarece $P = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} (p^* - c_{ij}) \cdot x_{ij} = 12 \cdot p^* - \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$ maximizarea funcției P este echivalentă cu minimizarea funcției $f = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$. Întrucât p^* este cel mai mare profit pe care l-ar obține compania din vânzarea unei unități de produs, am putea interpreta diferențele $c_{ij} \geq 0$ ca „pierdere de profit” ca urmare a livrării unei unități da la fabrica i la clientul j (de exemplu, pierderea ar fi nulă dacă livrarea se face de la F_1 la C_1 şi este de 4u.m./ unitate dacă livrarea se face de la F_3 la C_2 etc). Funcția f ar reprezenta pierderea de profit totală.

- astfel, situația dată este modelată prin problema de transport echilibrată cu datele din tabelul 8.46

	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
F_1	0	1	3	6	6
F_2	3	6	7	5	8
F_3	2	4	5	3	4
Cerere	4	6	$2 + r$	$6 - r$	18

Tabelul 8.46

Din rezolvare ar trebui să rezulte că, în vederea obținerii unui profit maxim, compania nu trebuie să vândă clientului 3 mai mult decât cele 2 unități cu care s-a angajat. Există două programe optime de transport, ambele degenerate!

5. Societatea „Cereala” are în proprietate mari întinderi de teren agricol în trei regiuni istorice A, B, C ale țării. Pentru următorul an agricol s-a stabilit cultivarea a 125 mii ha cu grâu, 60 mii ha cu orz şi 75 mii ha cu ovăz, suprafața totală de 260 mii ha fiind acoperită prin alocarea a 70 mii ha în regiunea A, 110 mii ha în B şi a 80 mii ha în regiunea C.
Pentru producerea unui hectar de cultură – aceasta însemnând pregătirea terenului, arat, însămânțat, lucrări de întreținere, control şi pază, recoltare – sunt necesare ore de muncă al căror cuantum diferă de la cultură la cultură şi de la regiune la regiune, aşa cum rezultă din tabelul 8.47

Muncă (ore/ha)		A	B	C
	Grâu	18	13	16
	Orz	15	12	12
	Ovăz	12	10	16

Tabelul 8.47

Costul unei ore de muncă este şi el diferenţiat funcţie de cultură şi de regiune conform tabelului 8.48

Costul muncii (euro/oră)		A	B	C
	Grâu	3	2,40	3,30
	Orz	2,70	3	2,80
	Ovăz	2,30	2,50	2,10

Tabelul 8.48

Conducerea societăţii doreşte să ştie cum vor fi repartizate suprafeţele alocate în fiecare regiune pe cele trei culturi astfel încât obiectivele stabilite să fie realizate cu cel mai mic cost total al muncii.

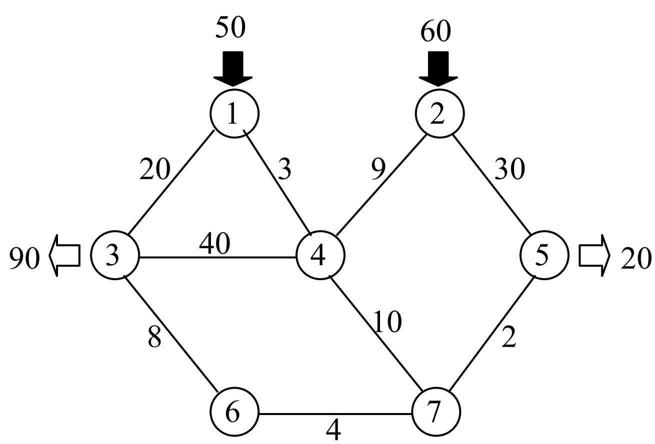


Figura 8.4

6. În figura 8.4 este reprezentată schematic o reţea de conducte aparţinând companiei petroliere LIKOUL. Nodurile 1,...,7 reprezintă mari rezervoare de ţiţei, dotate cu instalaţii de pompare. Funcţie de necesităţi, ţiţeiul stocat în unele rezervoare poate fi pompat prin conducte către altele, în vederea prelucrării în rafinăriile din apropiere. Valorile numerice înscrise pe muchii reprezintă lungimile conductelor. Costurile de pompare pe o conductă sau alta sunt proporţionale cu lungimile acestora.
Se pune problema transferării a 110 mii galoni de ţiţei de la rezervoarele 1 şi 2 către rezervoarele 3 şi 5. Din rezervorul 1 se pot pompa 50 mii galoni iar din rezervorul 2, restul de 60 mii galoni. Rezervoarele 3 şi 5 au nevoie de 90 mii, respectiv 20 mii galoni.
Cum trebuie organizat transferul astfel încât costul operaţiei să fie minim?

7. În rețeaua de transport din figura 8.5 nodurile s_1 şi s_2 sunt surse, nodurile t_1 şi t_2 sunt destinații iar i_1 şi i_2 sunt locații de tranzit. Valorile numerice înscrise pe arce sunt costuri unitare de transport (euro).

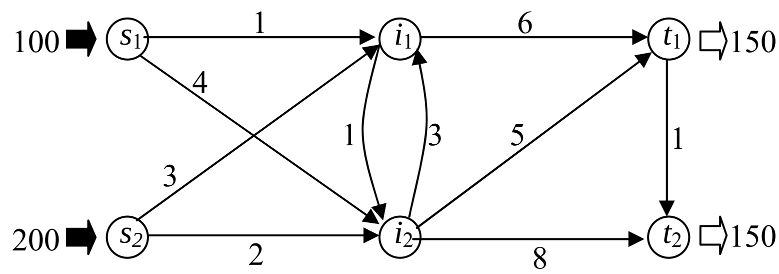


Figura 8.5

i) Determinați programul de transport care minimizează costul total. Reprezentați grafic modul în care vor fi efectuate transporturile pe diferitele rute ale rețelei de la surse la destinații.

ii) Presupunem că între sursele s_1 şi s_2 se deschide o rută cu ambele sensuri permise la un cost unitar de 1 euro.Totodată costul unitar de transport de la locația s_1 la locația i_1 creşte la 5 euro. Ce efecte au aceste modificări în programul optim de transport?

Unitatea de învățare 9

ANALIZA DRUMULUI CRITIC

Proiect: concept şi structură. Rețeaua coordonatoare AoA a unui proiect

Cuprins

9.1 Introducere
9.2 Conceptul de proiect
9.3 Structura unui proiect
9.4 Reprezentarea AoA a unui proiect
- **9.4.1 Instrucțiuni de reprezentare**
- **9.4.2 Cum se trasează o rețea AoA**

9.5 Analiza rețelei coordonatoare AoA
- **9.5.1 Obiective şi notații**
- **9.5.2 Pasul înainte**
- **9.5.3 Pasul înapoi**
- **9.5.4 Activități critice. Drumul critic**
- **9.5.5 Termenele activităților. Rezerva totală**

Probleme propuse
Bibliografie

9.1 Introducere

Un proiect este o acţiune complexă, cu caracter de unicat (nerepetabilă), compusă dintr-un mare număr de activităţi şi la care participă diverse unităţi productive, institute sau persoane fizice. Unele activităţi pot fi executate simultan (sunt independente) în timp ce altele nu se pot desfăşura decât într-o anumită ordine. Fiecare activitate are o anumită durată de execuţie, necesită diferite resurse (ca de exemplu forţă de muncă specializată) şi implică anumite costuri. Întreaga acţiune are drept scop realizarea unui anumit obiectiv.
Ca exemple de acţiuni complexe putem cita:

- construirea unui obiectiv civil (un hotel, un complex de locuinţe), economic (o fabrică, o hală industrială,un depozit, o autostradă) sau militar (proiectarea, construirea şi testarea unui nou avion, navă, rachetă);
- cercetarea şi dezvoltarea de noi produse şi servicii;
- un program de îmbunătăţiri funciare;
- revizia şi reparaţia unei instalaţii industriale.

De obicei, acţiunile complexe de genul celor amintite pot avea sute şi chiar mii de activităţi şi utilizează o mare varietate de resurse (consumabile, forţă de muncă, bani)
În acest context este foarte important de ştiut:

- care este durata minimă de execuţie a proiectului dacă se au în vedere duratele activităţilor şi condiţionările dintre acestea;
- în ce interval de timp trebuie executată o anumită activitate;
- care dintre activităţile proiectului sunt critice în sensul că trebuie executate exact la termen în vederea menţinerii întregii lucrări în orarul stabilit;
- dacă se au în vedere şi resursele necesare executării activităţilor, disponibile de regulă în cantităţi limitate, cum trebuie făcută programarea activităţilor astfel încât
- în orice moment necesarul de resurse să se încadreze în disponibil;

sau

- anumite resurse, cum ar fi forţa de muncă să fie utilizate cât mai uniform.
- dacă se au în vedere costurile implicate se pune problema menţinerii acestora în limitele unui plafon dat, prin stabilirea judicioasă a duratelor şi a termenelor de execuţie ale activităţilor.

În secţiunile următoare vor fi prezentate metode cu ajutorul cărora se dau răspunsuri pertinente la unele din chestiunile formulate.

9.2 Conceptul de proiect

În cele ce urmează un proiect este o colecţie de entităţi interdependente, denumite activităţi. Fiecare activitate este o parte bine definită şi delimitată a proiectului care necesită timp şi eventual resurse.

Exemplul 9.1 În construirea unui imobil

- escavarea fundațiilor;
- turnarea betonului în fundații;
- întărirea betonului.

sunt exemple de activități; primele două necesită timp, utilaje şi personal calificat, ultima are nevoie doar de timp.

Divizarea unui proiect în activități este o chestiune foarte importantă şi de mare răspundere deoarece ea trebuie realizată de aşa manieră încât să permită corelarea logică şi tehnologică a părților rezultate din diviziune! În faza de concepție a proiectului, gradul de detaliere este mic: proiectul este redus la un număr mic de activități, de talie mare, şi pe această structură simplă cei implicați îşi pot face o idee asupra posibilităților de realizare efectivă a proiectului, asupra costurilor şi a resurselor necesare şi decid aprobarea sau respingerea acestuia. În continuare – dacă proiectul a fost aprobat – fiecare activitate majoră este privită ca o acțiune complexă de sine stătătoare şi este descompusă în activități mai mici, interdependente.

Exemplul 9.2 Acțiunea „turnarea betonului în fundații" din exemplul 9.1 presupune executarea următoarelor activități de talie mai mică:

A ≡ aducerea materialelor lemnoase şi feroase în şantier;
B ≡ confecționarea cofrajelor;
C ≡ confecționarea armăturilor;
D ≡ montarea cofrajelor;
E ≡ montarea armăturilor;
F ≡ prepararea betonului;
G ≡ aducerea şi turnarea betonului în cofraje.

De reținut că detalierea unui proiect nu se face dintr-o dată ci progresiv, funcție de etapa de studiu a proiectului sau de necesități: pentru conducerea strategică sau pentru conducerea operativă.

9.3 Structura unui proiect

Considerăm un proiect compus din activitățile A , B , C ...Vom spune că:

- activitatea A **precede** activitatea B dacă B nu poate începe decât după terminarea activității A;
- activitatea A **precede direct** activitatea B dacă A precede B şi B poate începe **imediat** după terminarea lui A.

Se constată uşor următoarele:

- **relația de precedență este o relație de ordine** în mulțimea activităților în sensul că este tranzitivă:

Dacă A precede B şi B precede C atunci A precede C.

- precedența este numai o relație de ordine **parțială** întrucât pot exista activități ce se pot executa simultan;

- **precedența directă nu este o relație de ordine**: dacă B poate începe imediat după terminarea lui A şi C poate începe imediat după terminarea lui B atunci este clar că A precede C dar nu direct, între ele fiind B!
- în schimb, **precedențele directe determină toate relațiile de precedență dintre activitățile unui proiect.**

Exemplul 9.3 Considerăm proiectul reprezentând acțiunea de turnare a betonului în fundații din exemplul 9.2 şi compus din activitățile A , B , ..., G. Între aceste activități există următoarele precedențe directe:

A precede direct B şi C;
B precede direct D;
C precede direct E;
D , E , F preced direct G.

În continuare fixăm un proiect P pentru care s-au identificat activitățile componente corespunzătoare unui grad de detaliere convenit şi s-au precizat toate relațiile de precedență directă dintre ele. Deasemeni presupunem cunoscute duratele activităților. Toate acest elemente se regăsesc în aşa numita **listă de activități a proiectului**.

Nr. Crt.	Descrierea activității	Codul activității	Activități direct precedente	Durata activității

În mod firesc apare acum problema reprezentării structurii unui proiect, **structura însemnând în esență cuplul activități + precedențe directe.**
Cel mai bun mod de reprezentare a structurii unui proiect s-a dovedit a fi **rețeaua coordonatoare**; în esență, aceasta este un **graf orientat**, adică un desen compus din puncte (numite şi **noduri**) şi linii orientate (numite şi **arce**) care unesc unele puncte.
Există două posibilități de reprezentare:

Reprezentarea activitate – arc (abreviat AoA) în care activitățile proiectului corespund arcelor rețelei coordonatoare;
Reprezentarea activitate – nod (abreviat AoN) în care activitățile proiectului se identifică cu nodurile rețelei coordonatoare.

Exemplul 9.4
Compania OȚELARII VESELI specializată în fabricarea țevilor a decis construirea unei noi hale industriale în oraşul X. În vederea stabilirii duratei de execuție, a bugetului şi a resurselor necesare conducerea a cerut departamentului de planificare elaborarea unei schițe de proiect care să includă principalele activități, condiționările dintre acestea şi o estimare a duratelor de realizare (tabelul 9.1)

Nr. Crt.	Descrierea activităţii	Codul activităţii	Activităţi direct precedente	Durata (luni)
1	Proiectarea halei	P	–	7
2	Obţinerea avizelor de execuţie	A	P	2
3	Comenzi utilaje	CU	P	3
4	Organizare de şantier	OS	P	3
5	Livrări utilaje	LU	CU	6
6	Execuţie reţele tehnice	R	A , OS	10
7	Execuţie drumuri interioare	D	R	5
8	Lucrări de construcţii montaj	C	LU , R	14
9	Instruirea personalului	E	P	10

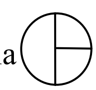
Tabelul 9.1

9.4 Reprezentarea AoA a structurii unui proiect

În reprezentarea AoA:

- arcele reţelei corespund activităţilor proiectului;
- nodurile reţelei au semnificaţia unor **momente de timp** (numite şi **evenimente**) de începere şi/sau de terminare a unei activităţi sau a mai multora.

9.4.1 Instrucţiuni de reprezentare

- Un nod (eveniment) va fi reprezentat prin sigla 

- O activitate A cu durata d_A va fi reprezentată printr-un arc orizontal ca în figura 9.1.1:

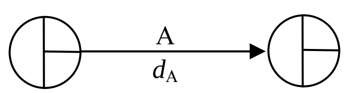


Figura 9.1.1

sau cu o porţiune orizontală ca în figurile 9.1.2 sau 9.1.3:

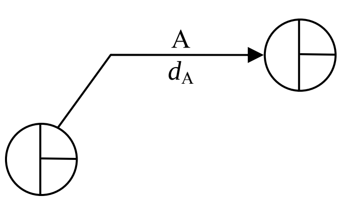


Figura 9.1.2

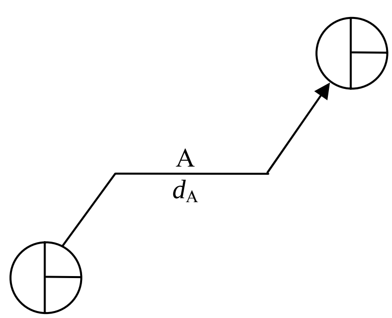


Figura 9.1.3

- **Regula fundamentală**. Situația „activitatea A precede direct activitatea B" va fi reprezentată prin diagrama din figura 9.2:

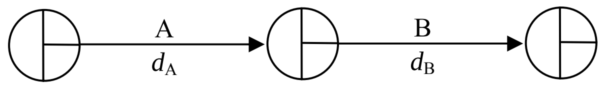


Figura 9.2

Din regula fundamentală rezultă variantele de reprezentare din figurile 9.3.1 şi 9.3.2:

Activitățile A , B preced direct activitatea C

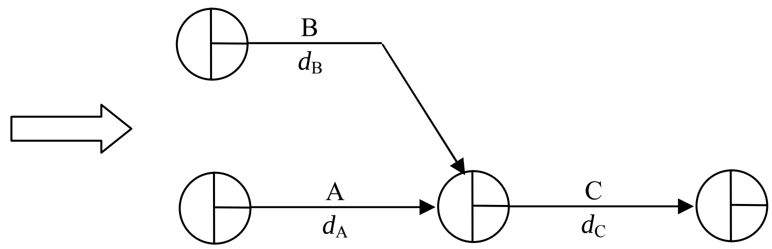


Figura 9.3.1

Activitatea A precede direct activitățile B , C

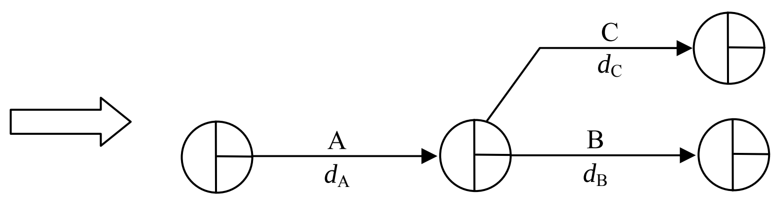


Figura 9.3.2

- **Regula de evitare a falsei precedențe**

Deseori apar situații în care reprezentarea corectă a unor precedențe directe necesită introducerea unor „extra activități". Se consideră situația:

$$\begin{cases} \text{A, B preced direct C} \\ \text{A precede direct D} \end{cases}$$

Reprezentând mai întâi primul rând de precedențe şi apoi pe al doilea se ajunge la diagrama din figura 9.4.1.

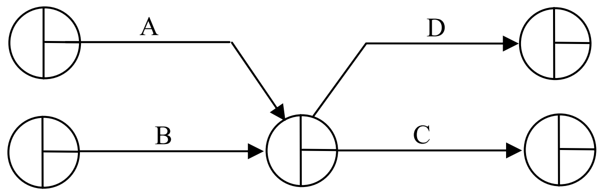


Figura 9.4.1

incorectă, deoarece activitatea D nu este condiționată de către B. Pentru evitarea acestei greşeli vom vizualiza mai întâi condiționările:

$$\begin{cases} \text{A precede direct D} \\ \text{B precede direct C} \end{cases}$$

după care, prin intermediul unei **activități fictive cu durata zero**, vom reprezenta şi relația:

A precede direct C

Reprezentarea corectă a situației date apare în figura 9.4.2:

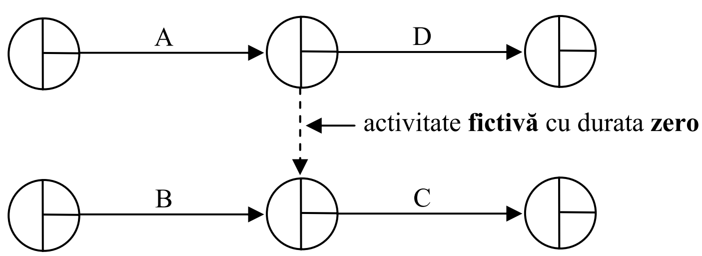


Figura 9.4.2

- **Regula de reprezentare a activităților paralele**. Conform regulei fundamentale, situația

$$\begin{cases} \text{A precede direct B, C} \\ \text{B, C preced direct D} \end{cases}$$

se reprezintă prin diagrama:

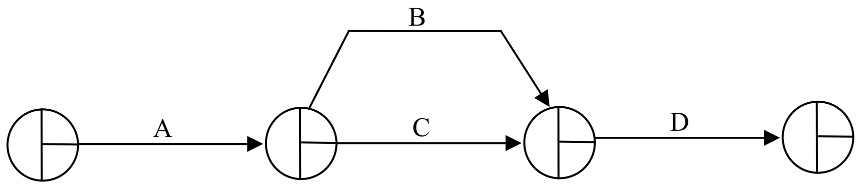


Figura 9.5.1

corectă din punct de vedere logic **însă nesatisfăcătoare** deoarece nu permite identificarea unui arc prin perechea de noduri extremități (arcele B şi C au aceleaşi extremități!). Pentru reprezentarea **paralelismului** activităților B şi C în raport cu A şi D, utilizăm din nou o activitate fictivă cu durata zero ca în figura 9.5.2:

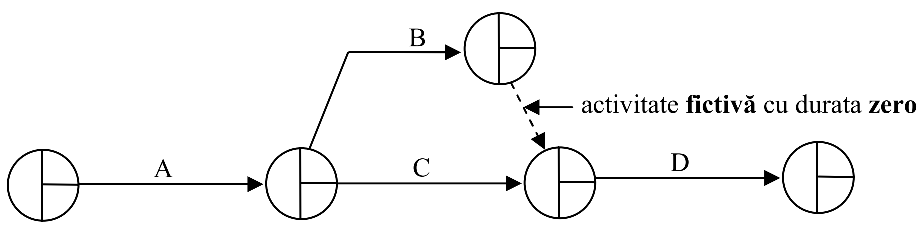


Figura 9.5.2

9.4.2 Cum se trasează o rețea AoA

1) Se începe prin fixarea pe hârtie a unui nod cu semnificația de **începere a execuției proiectului.** Din acest nod vor pleca toate arcele corespunzătoare activităților **inițiale** ale proiectului adică a acelor activități neprecedate de altele.

2) La introducerea unui nou arc în desen se va avea în vedere reprezentarea corectă a precedențelor directe dintre activitatea introdusă şi activitățile deja reprezentate.

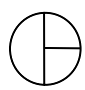
3) **Se recomandă ca în momentul inserării unei noi activități în rețea să nu se deseneze şi nodul final al arcului corespunzător !** Acesta poate fi nod final şi pentru alte arce corespunzătoare unor activități încă nereprezentate!!

4) La epuizarea listei de activități se va constata că unul sau mai multe arce nu au încă nod final! Aceste arce corespund activităților **finale** din proiect adică acelor activități care nu mai preced nici o altă activitate. Tuturor acestor arce li se va asigura un acelaşi nod final cu semnificația de moment de terminare a proiectului.

5) După desenarea rețelei se recomandă ca nodurile să fie **numerotate** în vederea identificării activităților prin perechea de noduri extremități. Nodul care semnifică începerea proiectului se numerotează de obicei cu **zero**. Numerotarea trebuie astfel făcută încât pentru orice arc numărul de ordine al extremității inițiale să fie mai mic decât numărul de ordine al extremității finale (chiar şi pentru activitățile fictive!). În general, numerotarea nu este unică.

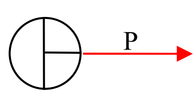
Recomandare: cele mai bune instrumente pentru trasarea unei rețele coordonatoare sunt un creion şi o gumă bună!

Exemplul 9.5 Diagramele din figurile 9.6.1 – 9.6.8 redau reprezentarea „în dinamică” a proiectului din exemplul 9.4



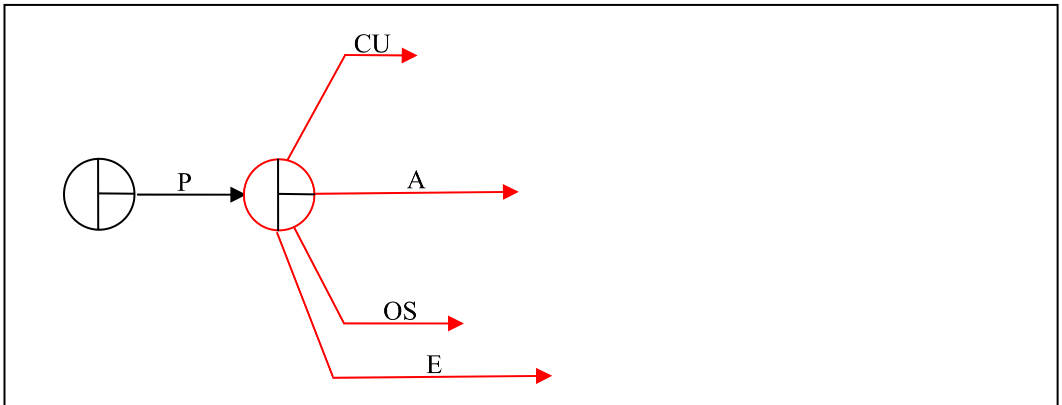
START: Desenarea rețelei coordonatoare începe prin fixarea pe hârtie a unui nod cu semnificația de **moment de începere a execuției proiectului**.

Figura 9.6.1



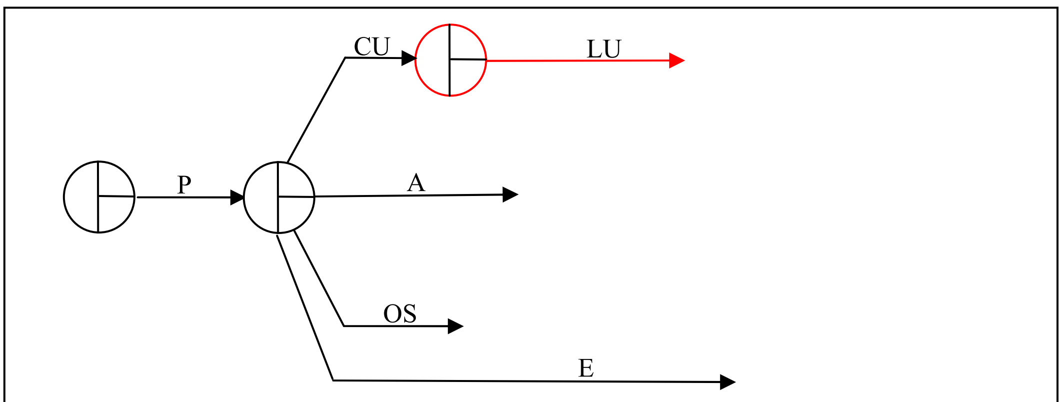
Se introduce arcul corespunzător activității **inițiale** P

Figura 9.6.2



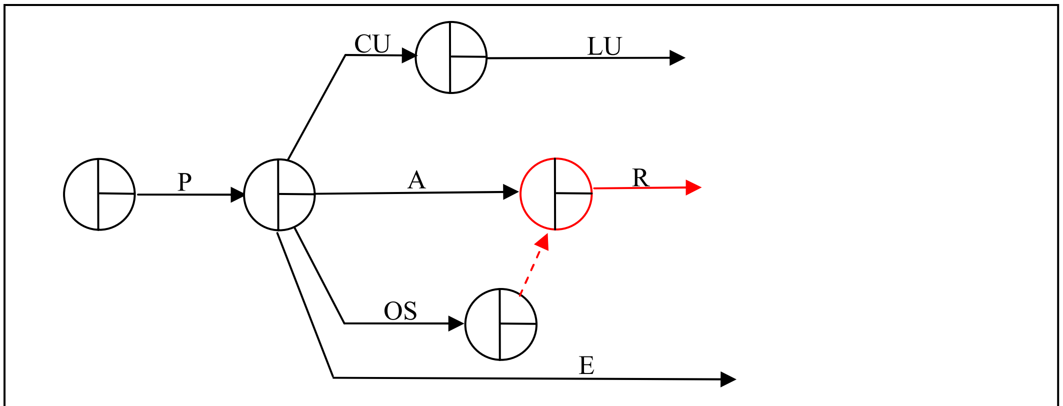
Se introduc arcele corespunzătoare activităților CU , A , OS şi E, toate precedate direct de activitatea P

Figura 9.6.3



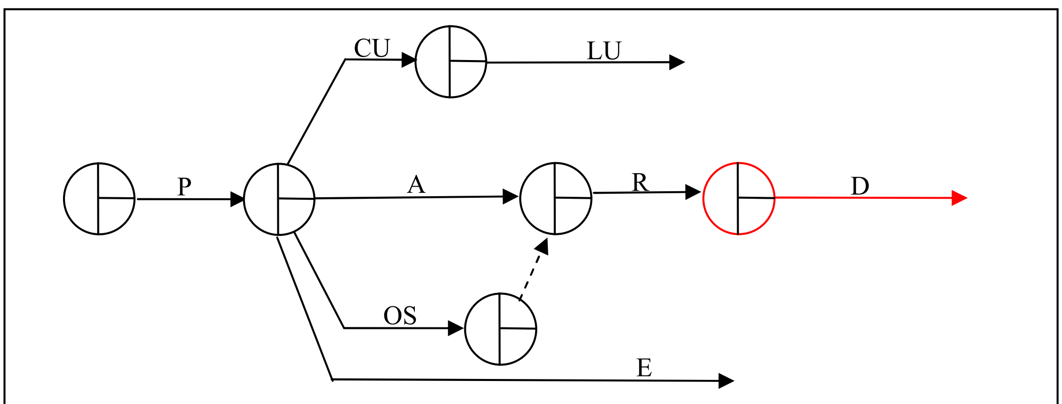
Se introduce arcul corespunzător activității LU, direct precedată de CU

Figura 9.6.4



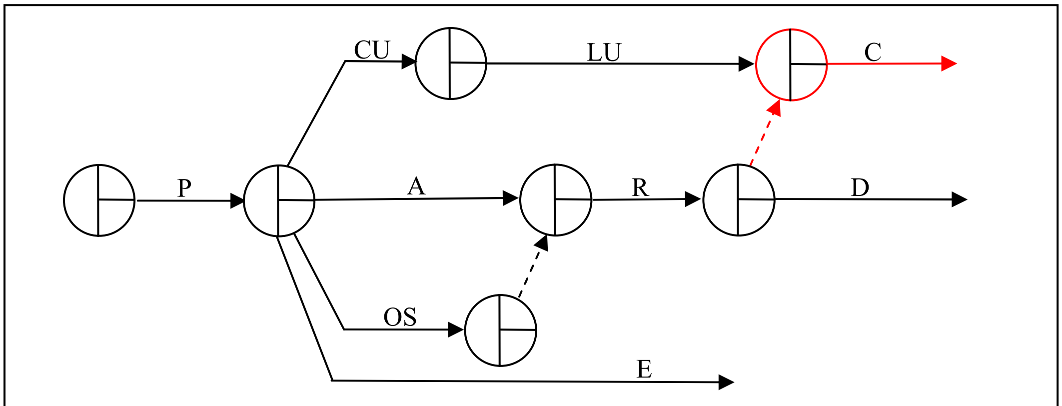
Se introduce arcul corespunzător activității R, direct precedată de A şi OS. Activitățile A şi OS sunt paralele în raport cu P și R ⇨ este nevoie de o activitate fictivă !

Figura 9.6.5



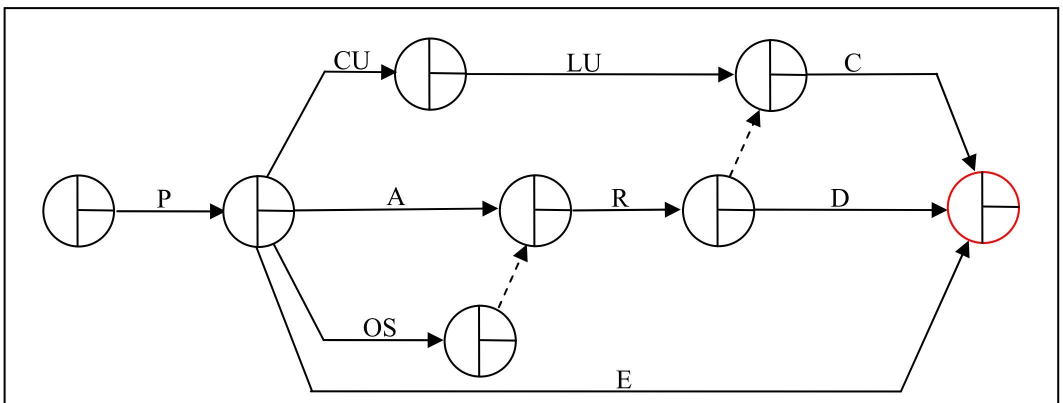
Se adaugă arcul corespunzător activității D, direct precedată de R.

Figura 9.6.6



Se adaugă arcul corespunzător activității C, direct precedată de LU şi R. Este necesară introducerea unei activități fictive !.

Figura 9.6.7



Lista de activități a fost epuizată. Se introduce un nod final pentru activitățile finale C , D şi E cu semnificația de moment de terminare a proiectului.

Figura 9.6.8

În final numerotăm nodurile şi adăugăm duratele activităților - vezi figura 9.7 Rețeaua coordonatoare este gata pentru **analiză!**

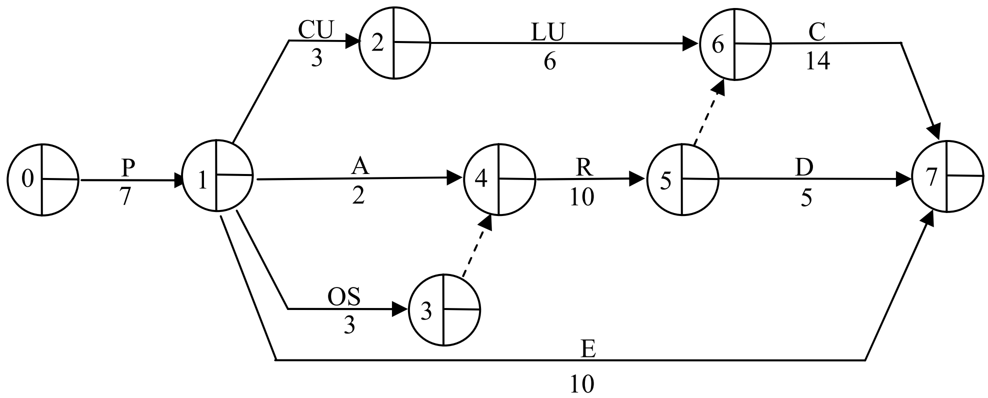


Figura 9.7

9.5 Analiza rețelei coordonatoare AoA

9.5.1 Obiective şi notații

Analiza rețelei coordonatoare este un proces de calcul prin care se obțin următoarele rezultate:

- **Durata minimă de execuție a proiectului** ținând cont numai de duratele activităților şi de precedențele directe dintre ele;
- **Activitățile critice** şi termenele de începere şi terminare ale acestora. Activitățile critice sunt acele activități care condiționează nemijlocit realizarea proiectului la termenul minim stabilit;
- **Termenele extreme şi rezerva totală** pentru fiecare activitate necritică. Termenele extreme sunt **termenul cel mai devreme de începere** şi respectiv **termenul cel mai târziu de terminare** al unei activități. Rezerva totală este diferența dintre cele două termene extreme din care se scade durata activității.

Reamintim că un nod al rețelei coordonatoare AoA semnifică un moment de timp (**eveniment**) în derularea proiectului, care poate însemna începerea şi/sau terminarea unei activități sau a mai multora. Fiecărui nod i se ataşează două termene:

EET ≡ **termenul timpuriu de producere** (**E**arliest **E**vent **T**ime)
LET ≡ **termenul târziu de producere** (**L**atest **E**vent **T**ime)

Aceste termene se înscriu în sigla nodului respectiv:

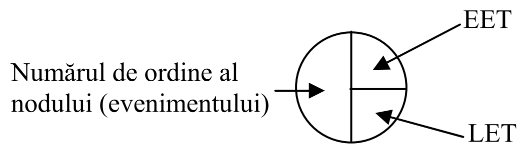


Figura 9.8

În continuare, durata unei activități reprezentate în rețea prin arcul (i, j) va fi notată cu d_{ij}.
Calculul termenelor asociate nodurilor se face în doi paşi.

9.5.2 Pasul inainte (forward step)

În pasul înainte – de la nodul inițial către cel final – se calculează termenele timpurii de producere EET după următoarea schemă iterativă:

- pentru nodul inițial (care semnifică începerea proiectului) se ia EET = 0.
- pentru celelalte noduri se aplică judecata rezultată din următorul exemplu (figura 9.9.1):

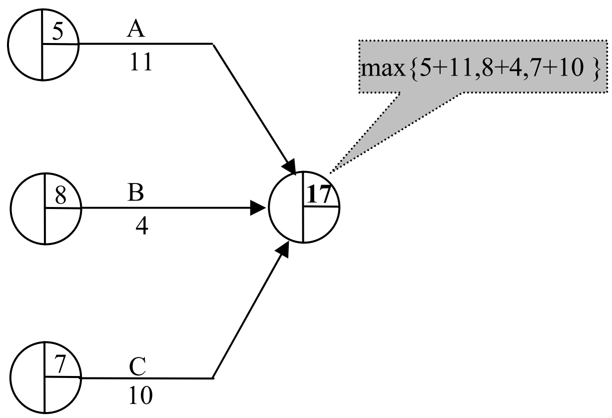


Figura 9.9.1

şi anume: **un eveniment nu se poate produce mai devreme de terminarea unei activități căreia îi serveşte drept moment de încheiere!**
Formal, pentru orice nod $j \neq 0$

$$EET(j) = \max\{EET(i) + d_{ij}\} \qquad (1)$$

maximul fiind luat după toate activitățile (i, j) al căror nod final este j.
Următoarea afirmație rezultă inductiv din relația (1):

Concluzia 1: termenul timpuriu de producere EET(j) reprezintă durata celei mai lungi secvențe de activități succesive care începe din nodul 0 şi sfârşeşte în nodul j. În particular, **termenul timpuriu de producere al evenimentului care semnifică terminarea proiectului reprezintă durata celei mai lungi secvențe de activități succesive existente în proiect şi în consecință indică durata minimă de execuție a proiectului!**

Exemplul 9.6 După efectuarea pasului înainte în rețeaua coordonatoare a proiectului de construire a unei hale industriale (figura 9.7) putem concluziona că lucrarea – aşa cum a fost concepută şi structurată în tabelul 9.1 – s-ar termina în 34 de luni, cu condiția respectării duratelor stabilite! Pentru rezultate vezi figura 9.10.

Pentru identificarea activităților care condiționează nemijlocit termenul final vom efectua:

9.5.3 Pasul înapoi (backward step)

În acest pas – executat de la nodul final către cel inițial – se calculează termenele târzii de producere LET după următoarea schemă iterativă:

- pentru nodul final se ia LET ≡ EET (EET este calculat în finalul pasului înainte!)
- pentru celelalte noduri se aplică judecata rezultată din următorul exemplu:

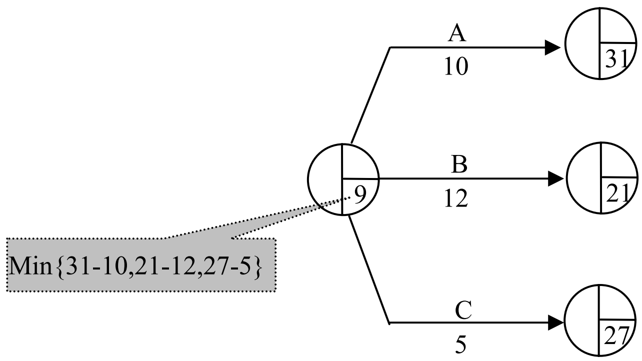


Figura 9.9.2

şi anume: **un eveniment nu se poate produce mai târziu de începerea unei activități căreia îi seveşte drept moment de start!**
Formal, pentru orice nod $i \neq$ nodul final:

$$LET(i) = \min\{LET(j) - d_{ij}\} \qquad (2)$$

Minimul fiind luat după toate activitățile (i, j) al căror nod inițial este *i*.
Relația (2) are şi ea o interpretare interesantă:

Concluzia 2 : dacă se notează cu T^* durata execuției proiectului (deja calculată în pasul înainte) atunci $T^* - LET(i)$ reprezintă durata celei mai lungi secvențe de activități succesive care începe din nodul *i* şi sfârşeşte în nodul final al rețelei coordonatoare.

9.5.4 Activități critice. Drumul critic

Exemplul 9.7 După executarea celor doi paşi în rețeaua AoA din exemplul 9.5 rezultă termenele din figura 9.10.

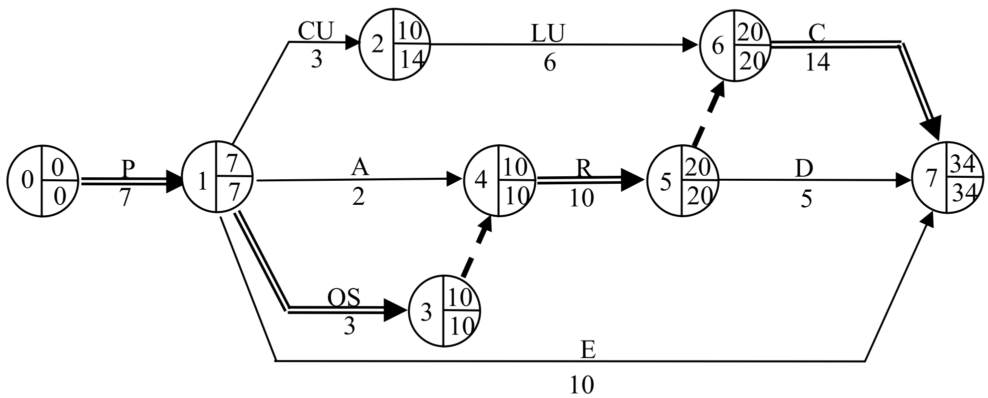


Figura 9.10

Nodurile rețelei coordonatoare se împart în două categorii (pentru ilustrare, vezi figura 9.10):

- **noduri critice**, caracterizate de egalitatea celor două termene de producere. În cazul analizat nodurile 0,1,3,4,5,6,7 sunt critice.
- **noduri necritice** pentru care EET < LET, cum este nodul 2.

Se numeşte activitate critică o activitate cu proprietățile:

- **arcul reprezentativ este plasat între două noduri critice;**
- **diferența dintre termenele de producere ale evenimentelor extremități este egală cu durata activității.**

În cazul analizat activitățile P , OS , R şi C sunt critice, celelalte sunt activități necritice Atenție: deşi extremitățile arcului asociat activității E sunt noduri critice, E nu este activitate critică întrucât nu este respectată a doua cerință a definiției: diferența 34 – 7 a termenelor extremităților este mai mare decât durata 10!

Se observă că **suma duratelor activităților critice este egală cu durata (minimă) de execuție a proiectului.** Dacă includem şi eventualele activități fictive, arcele asociate activităților critice constituie un drum de la nodul inițial (începerea proiectului) la cel final (terminarea proiectului). Acest drum se numeşte **drum critic** şi este **mulțimea de activități succesive cu cea mai mare durată totală de execuție** (concluzia 1)

9.5.5 Termenele activităților. Rezerva totală

Fiecărei activități i se asociază două **termene extreme** care rezultă direct din calculele efectuate în cei doi paşi:

Termenul cel mai devreme (timpuriu) de începere, abreviat EST ≡ **E**arliest **S**tarting **T**ime, este egal cu termenul timpuriu de producere a evenimentului **sursă**;

Termenul cel mai târziu de terminare, abreviat LFT ≡ **L**atest **F**inishing **T**ime, egal cu termnul târziu de producere al evenimentului **adresă**.

Pe baza acestor termene, putem calcula:

Termenul cel mai devreme de terminare, abreviat EFT ≡ **E**arliest **F**inishing **T**ime

$$\text{EFT} = \text{EST} + \text{durata activității}$$

Termenul cel mai târziu de începere, abreviat LST ≡ **L**atest **S**tarting **T**ime

$$\text{LST} = \text{LFT} - \text{durata activității.}$$

Pentru activitățile critice termenele de începere – timpuriu şi târziu – ca şi cele de terminare, timpuriu şi târziu, coincid.

Recapitulând, fiecărei activități i s-a determinat un interval de timp în care se poate realiza fără a încălca precedențele sau termenul final al proiectului

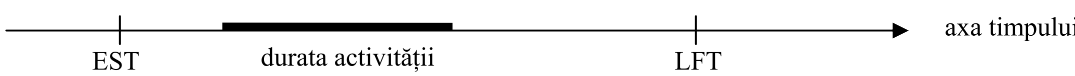


Figura 9.11.1

În acest cadru definim:

Rezerva totală a unei activități = LFT – EST – durata activității = LFT – EFT sau LST – EST

Figura 9.11.2

cu următoarea interpretare: **rezerva totală este intervalul maxim de timp cu care poate fi amânată o activitate de la termenul ei timpuriu de începere fără ca amânarea să afecteze termenul final al proiectului.**
În particular, **rezerva unei activități critice este zero** şi ca urmare, **orice abatere (întârzieri, întreruperi) de la termenele ei de începere şi terminare stabilite are ca efect nerespectarea termenului final al proiectului!**

Exemplul 9.8 În tabelul 9.2 au fost calculate termenele şi rezervele totale ale activităților proiectului din exemplul 4 pe baza termenelor evenimentelor rețelei coordonatoare din figura 9.10

Activitate	Durata	Termene de începere		Termene de terminare		Rezerva totală
		EST	LST	EFT	LFT	
P	**7**	**0**	**0**	**7**	**7**	**0**
A	2	7	8	9	10	1
CU	3	7	11	10	14	4
OS	**3**	**7**	**7**	**10**	**10**	**0**
LU	6	10	14	16	20	4
R	**10**	**10**	**10**	**20**	**20**	**0**
D	5	20	29	25	34	9
C	**14**	**20**	**20**	**34**	**34**	**0**
E	10	7	24	17	34	17

Tabelul 9.2

Exemplul 9.9 La o examinare mai în detaliu a activităților ce compun proiectul din exemplul 9.4 s-a constatat că, în faza lor inițială, activitățile „R ≡ rețele tehnice" şi „D ≡ drumuri interioare" pot începe chiar mai înainte de terminarea activității „OS ≡ organizare de şantier", odată cu unele lucrări pregătitoare de „construcții montaj ≡ C".
Ca urmare, activitățile OS , R , D şi C au fost divizate în câte două părți OS_1 , OS_2 ; R_1 , R_2 ; D_1 , D_2 ; C_1 , C_2 între care există precedențele directe din tabelul 9.3.

Codul activității	Activități direct precedente	Durata (luni)
OS_1	P	1
OS_2	OS_1	2
R_1	A , OS_1	5
D_1	A , OS_1	2
C_2	A , OS_1	4
R_2	R_1	5
D_2	D_1 , OS_2 ,R_1	3
C_2	LU , C_1 , R_1	10

Tabelul 9.3

Se poate constata că duratele activităților splitate nu s-au schimbat. Suntem interesați în a vedea dacă aceste precizări, privitoare la dependențele dintre activități, au efect asupra duratei de execuție a întregii lucrări.

Rețeaua coordonatoare AoA corespunzătoare proiectului detaliat este dată în figura 9.12. După cum era şi de aşteptat termenul lucrării s-a redus de la 34 la 26 luni dar şi drumul critic s-a schimbat fiind format acum din activitățile P , CU , LU şi C_2. Termenele şi rezervele revizuite ale activităților sunt calculate în tabelul 9.4

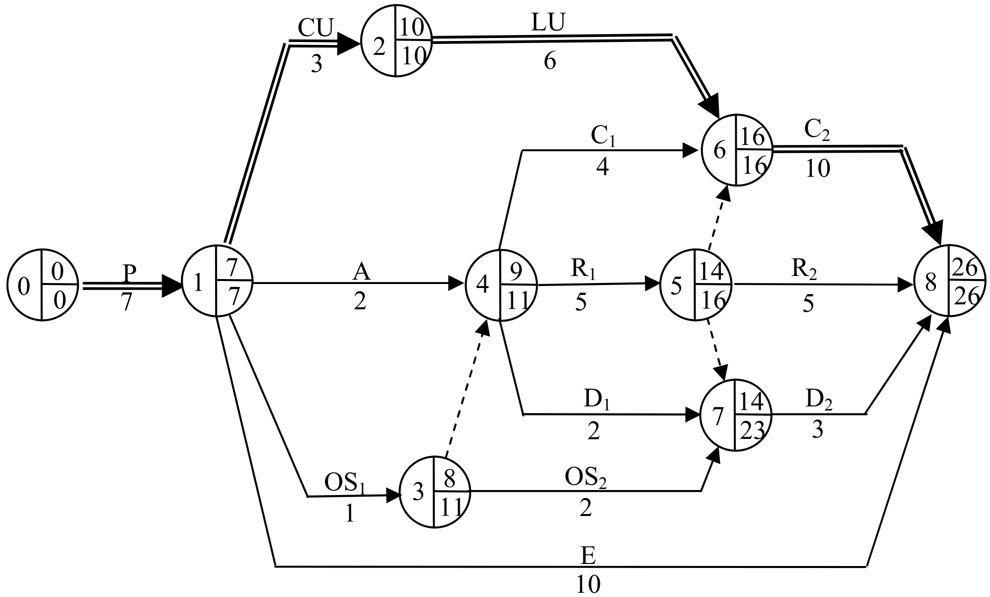


Figura 9.12

Activitate	Durata	Termen de începere		Termen de terminare		Rezerva totală
		EST	LST	EFT	LFT	
P	**7**	**0**	**0**	**7**	**7**	**0**
A	2	7	9	9	11	2
CU	**3**	**7**	**7**	**10**	**10**	**0**
OS_1	1	7	10	8	11	3
OS_2	2	8	21	10	23	13
LU	**6**	**10**	**10**	**16**	**16**	**0**
R_1	5	9	11	14	16	2
D_1	2	9	21	11	23	12
C_1	4	9	12	13	16	3
R_2	5	14	21	19	26	7
D_2	3	14	23	17	26	9
$\mathbf{C_2}$	**10**	**16**	**16**	**26**	**26**	**0**
E	10	7	16	17	26	9

Tabelul 9.4

Probleme propuse

1. Reprezentați grafic următoarele situații de precedență directă între unele activități ale unui proiect (nu este nevoie de nod inițial sau final – luați ca model diagramele care însoțesc instrucțiunile de reprezentare AoA). Folosiți activitățile fictive acolo unde este cazul şi nu uitați estetica desenului!

i) Activitatea K este precedată direct de activitățile A şi C iar activitatea L de activitățile B şi C;
ii) Activitatea K este precedată direct de activitățile A şi C, activitatea L de activitățile B şi C iar activitatea M depinde numai de C;
iii) Activitatea K depinde de activitatea A, activitatea L depinde de activitatea B iar activitatea M este direct precedată de activitățile A,B şi C;
iv) K depinde de activitatea A, activitatea L depinde de activitățile A şi B iar activitatea M este direct precedată de activitățile B şi C;
v) Activitatea K depinde de activitatea A, activitatea L depinde de activitățile A şi B iar activitatea M este direct precedată de activitățile A, B şi C;

2. Se consideră rețeaua coordonatoare AoA din figura 9.13:

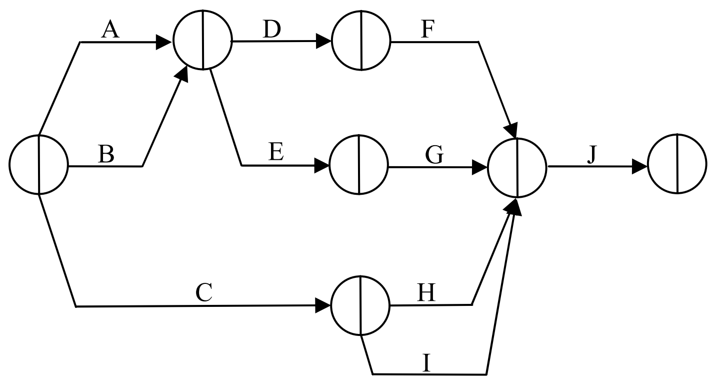


Figura 9.13

i) Se observă că arcele corespunzătoare activităților A şi B respectiv H şi I au aceleaşi extremități. Adăugați activități fictive pentru eliminarea celor două paralelisme. (Nu uitați: rețeaua, aşa cum a fost dată este corectă din punct de vedere logic dar utilizarea ei în forma actuală îngreunează analiza...)

ii) La o reexaminare a precedențelor dintre activități s-au constatat următoarele;
- activitatea H este direct precedată şi de activitatea B nu numai de C;
- activitatea G este direct precedată şi de activitatea D nu numai de E.

Adăugați noi activități fictive pentru redarea corectă a noilor condiționări.

Soluție: i) „Rezolvarea” celor două paralelisme este indicată în figura 9.14:

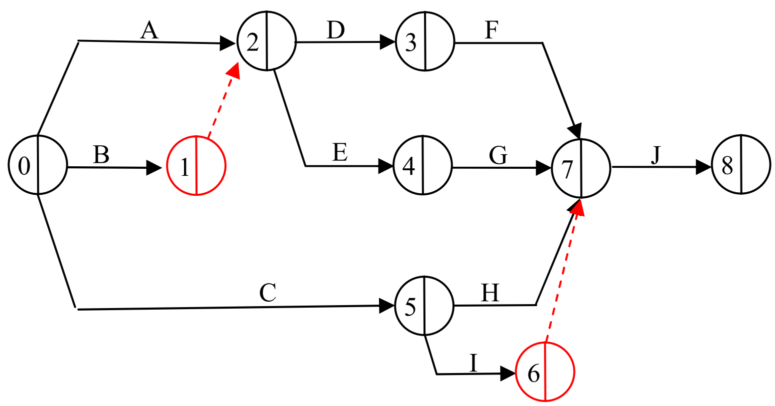


Figura 9.14

ii) condiționarea începerii activității G de terminarea activității D se rezolvă simplu prin introducerea unei activități fictive da la nodul 3 la nodul 4 (figura 9.14) În schimb, introducerea precedenței dintre B şi H nu mai este aşa de simplă! La prima vedere ar fi suficient să inserăm o activitate fictivă de la nodul 1 la nodul 5 ; s-ar obține rețeaua parțială din figura 9.15

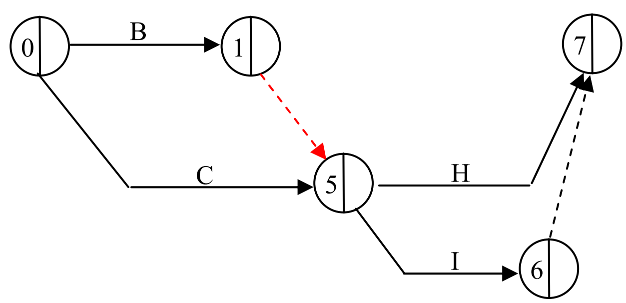


Figura 9.15

din care ar rezulta că începerea activității I este condiționată şi de terminarea activității B, fapt nespecificat în enunț. Rezolvarea corectă este dată în figura 9.16.

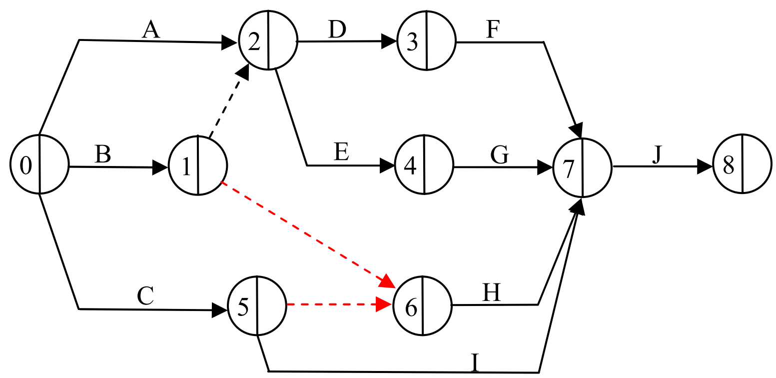


Figura 9.16

3. Într-un atelier există trei utilaje (codificate 1,2 şi 3) care trebuie mutate de pe soclurile lor, reparate şi modificate şi apoi instalate în alte locuri. Există o echipă de muncitori care demontează utilajele, o alta care face reviziile şi modificările utilajelor demontate şi în fine o a treia echipă care instalează utilajele modificate pe noile amplasamente. Prin urmare există nouă activităţi distincte:

Trei activităţi „de demontare”: D_1 , D_2 , D_3 ;
Trei activităţi „de revizie şi modificare”: M_1 , M_2 , M_3 ;
Trei activităţi „de reamplasare” : I_1 , I_2 , I_3 .

Fiecare echipă nu poate executa mai mult de o activitate specifică la un moment dat! Să se traseze reţeaua coordonatoare a întregii lucrări în reprezentarea AoA.

Soluţie: Se cere multă atenţie pentru reprezentarea corectă a precedenţelor! De exemplu, activitatea $M_2 \equiv$ revizia şi modificarea utilajului 2, nu poate începe mai înainte de terminarea demontării utilajului 2 $\equiv$ activitatea D_2, dar şi de terminarea reparaţiilor şi modificărilor la utilajul 1 $\equiv$ activitatea M_1 etc. Recomandăm revederea soluţiei problemei 2. Reţeaua coordonatoare cerută este dată în figura 9.17

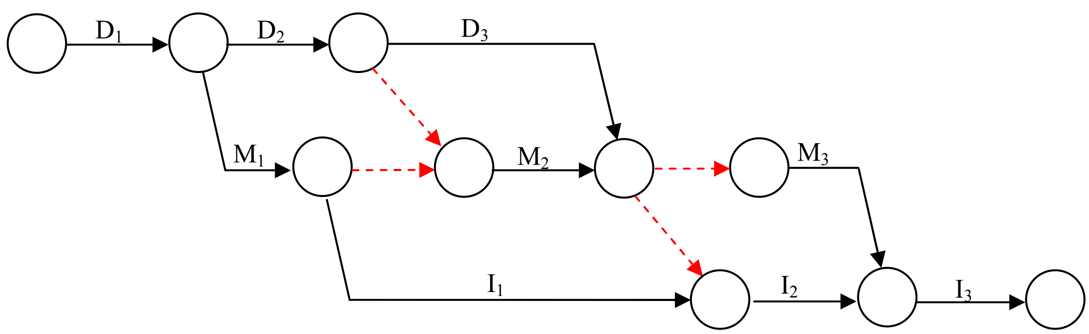


Figura 9.17

4. Desenați rețeaua AoA pentru fiecare dintre proiectele ale căror liste sunt date în tabelul 9.5

a)

Codul actvității	Activități direct precedente
A	–
B	–
C	A
D	A , B
E	A , B
F	C
G	D , F
H	E , G

b)

Codul actvității	Activități direct precedente
A	–
B	–
C	A
D	A
E	B , C
F	B , C
G	D , E

c)

Codul actvității	Activități direct precedente
A	–
B	–
C	–
D	B
E	A
F	B
G	C , D
H	B , E
I	F , G
J	H

Tabelul 9.5

4. Pentru proiectele ale căror liste de activități sunt date în tabelul 9.6:

Desenați rețeaua coordonatoare AoA;

Determinați durata minimă de execuție şi drumul critic;

Calculați termenele activităților şi rezervele totale ale acestora.

a)

Codul activității	Activități direct precedente	Durata (luni)
A	–	3
B	A	3
C	A	3
D	C	5
E	B , C	6
F	D , E	9
G	E	5
H	G	3
I	G , F	5
J	I , H	10

b)

Codul activității	Activități direct precedente	Durata (luni)
A	–	4
B	–	3
C	–	5
D	A	7
E	A , B	2
F	D	2
G	C , D	6
H	E	4
J	E	9
K	E	12
L	G , H	4
M	J , K	8
N	F , J , K	3

c)

Codul activității	Activități direct precedente	Durata (luni)
A	–	3
B	–	5
C	–	2
D	B	6
E	A	4
F	B	4
G	C , D	7
H	B , E	3
I	F , G	4
J	H	1

Tabelele 9.6

Bibliografie

Boldur, G., Săcuiu, I., Ţigănescu, E., Cercetare operaţională cu aplicaţii în economie, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979

Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A., An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making, West Publishing Company, 1988

Ciobanu, Gh., Nica, V. T., Mustaţă, Fl., Mărăcine, V., Cercetări Operaţionale cu aplicaţii în economie. Teoria grafurilor şi Analiza Drumului Critic, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 1996

Lockyer, K., Gordon, J., Project Management and Project Network Techniques, Pitman Publishing, London, 1996

Hillier,F. S., Lieberman, G. J., Introduction to Operations Research, Mc Graw Hill Publishing Company, New York, ..., 2001

Ciobanu, Gh., Nica, V. T.,Mustaţă, Fl., Mărăcine, V., Cercetări Operaţionale. Optimizări în reţele. Teorie şi aplicaţii economice, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2002

Taha, A., H., Operations Research. An Introduction, eight edition, Pearson Prentice Hall,2007

Bronson, R., Naadimuthu, G., Theory and Problems of Operations Research, Tata Mc Graw Hill Publishing Company Limited, New Delhi, 2008

Unitatea de învățare 10

ANALIZA DRUMULUI CRITIC
Actualizarea rețelelor coordonatoare

Cuprins

10.1 O interpretare alternativă a rezervei totale
10.2 Diagrama Gantt
10.3 Actualizarea rețelelor coordonatoare

Probleme propuse

10.1 O interpretare alternativă a rezervei totale

Considerăm dat un proiect împreună cu rețeaua sa coordonatoare. Pentru exemplificări vom folosi proiectul halei industriale din exemplul 9.4 – vezi tabelul 9.1 şi figura 9.7 (unitatea de învățare 9)
Rețeaua coordonatoare pune în evidență o mulțime de colecții de activități ale căror arce reprezentative formează **drumuri** de la nodul **inițial** al rețelei la nodul **final** – eventual cu ajutorul unor activități fictive. O asemenea colecție se va numi **secvență de activități succesive** deoarece realizarea efectivă a activităților lor trebuie făcută într-o anumită ordine. Suma duratelor activităților ce compun o secvență – numită şi **durata secvenței** – reprezintă intervalul **minim** de timp necesar executării acestor activități (eventualele activități fictive prezente în secvență nu contează având durata zero!). Calificativul „minim" are în vedere posibilitatea existenței unei **pauze** între terminarea unei activități şi începutul activității următoare din secvență.
Evident, numărul secvențelor de activități succesive este finit.Logic, terminarea proiectului presupune încheierea executării fiecărei secvențe de activități succesive astfel că, **secvența cu durata cea mai mare – drumul critic – va indica şi durata minimă de realizare a întregului proiect.**

Exemplul 10.1 În tabelul 10.1 sunt afişate toate secvențele de activități succesive existente în rețeaua AoA din figura 9.7

Secvența de activități succesive	Durata (luni)
(P , CU , LU , C)	30
(P , A , R , C)	33
(P , A , R , D)	24
(P , OS , R , C)	34
(P , OS , R , D)	25
(P , E)	17

Tabelul 10.1

Fiecare activitate face parte dintr-o secvență de activități succesive sau din mai multe. În continuare, secvența cu durata cea mai mare care conține o activitate dată se va numi **secvența maximală asociată** activității respective.

Exemplul 10.2 Din tabelul 10.1 rezultă că activitatea D se găseşte doar în secvențele (P , A , R , D) şi (P, OS , R, D) cu duratele 24 şi respectiv 25 luni. Secvența maximală asociată lui D va fi (P, OS, R, D).

Revenim la cazul general. Presupunem că nodurile rețelei au fost numerotate 0 , 1 , ..., n unde 0 este eticheta nodului inițial iar n este eticheta nodului final. Fixăm o activitate oarecare, reprezentată prin arcul (i, j) unde $i < j$ sunt etichetele extremităților, inițială şi finală. Fie σ_{ij} secvența maximală asociată activității (i, j) - vezi figura 10.1

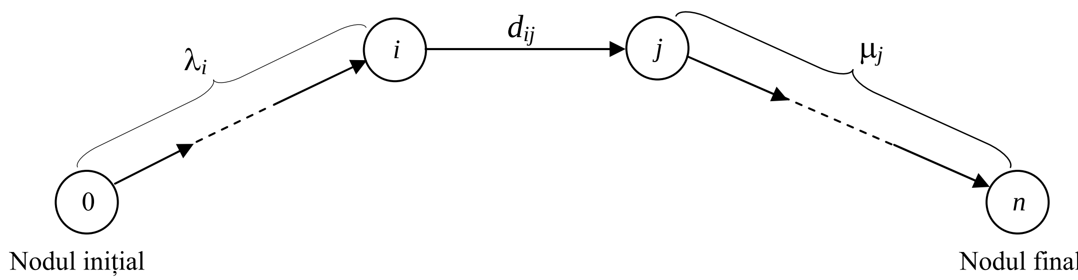


Figura 10.1

Dacă din σ_{ij} extragem arcul (i, j) rămân două drumuri:

λ_i - care pleacă din nodul inţial 0 şi se termină în extremitatea iniţială *i* a arcului scos;

μ_j - care pleacă din extremitatea finală a arcului eliminat şi se termină în nodul final *n*.

Notând cu $d(S)$ durata unei secvenţe de activităţi succesive putem scrie:

$$d(\sigma_{ij}) = d(\lambda_i) + d_{ij} + d(\mu_j) \tag{1}$$

Un simplu raţionament prin absurd arată că:

λ_i este secvenţa cu durata cea mai mare printre secvenţele de activităţi succesive care pleacă din nodul 0 şi se termină în nodul *i*;

μ_j este secvenţa cu durata cea mai mare printre secvenţele de activităţi succesive care pornesc din nodul *j* şi se termină în nodul final *n*.

Fie T^* durata minimă de execuţie a proiectului ≡ durata secvenţei „drum critic”.Concluziile 1 şi 2 din subsecţiunile 9.5.2 şi 9.5.3 arată că:

$$d(\lambda_i) = EET(i) \equiv EST(i, j) \tag{2}$$

$$d(\mu_j) = T^* - LET(j) = T^* - LFT(i, j) \tag{3}$$

Din (1), (2) şi (3) rezultă:

$$d(\sigma_{ij}) = EST(i, j) + d_{ij} + T^* - LFT(i, j) = T^* - \left[LFT(i, j) - EST(i, j) - d_{ij}\right] \tag{4}$$

Deoarece:

Rezerva totală a activităţii (i, j) = LFT(i , j) - EST(i , j) - d_{ij}

din (4) obţinem:

Rezerva totală a activităţii $(i, j) = T^* - d(\sigma_{ij})$

sau în cuvinte: **rezerva totală a unei activităţi este egală cu diferenţa dintre durata drumului critic şi durata secvenţei maximale care conţine activitatea respectivă.**

Exemplul 10.3 În tabelul 10.2 sunt indicate secvențele maximale asociate activităților proiectului de referință ordonate descrescător după durate. Se regăsesc rezervele totale deja calculate în tabelul 9.2

Activitate	Secvența maximală asociată	Durata secvenței	Rezerva totală a activității
P , OS , R , C	(P , OS , R , C)	34	0 = 34 - 34
A	(P , A , R , C)	33	1 = 34 - 33
CU , LU	(P , CU , LU , C)	30	4 = 34 - 30
D	(P , OS , R , D)	25	9 = 34 - 25
E	(P , E)	17	17 = 34 - 17

Tabelul 10.2

Determinarea în manieră algoritmică a secvențelor maximale asociate activităților proiectului se realizează prin următoarea **procedură de etichetare.**

- **La pasul înainte**, când fiecărui nod $j \neq$ nodul inițial 0 i se aplică formula:

$$EET(j) = \max_{(i,j)} \{EET(i) + d_{ij}\}$$

în dreptul sfertului din dreapta sus a siglei nodului j se va trece eticheta $\tilde{i}$ a nodului în care s-a realizat maximul formulei:

$$EET(j) = EET(\tilde{i}) + d_{\tilde{i},j}$$

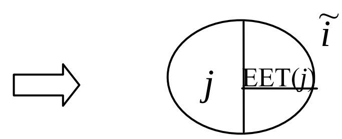


Figura 10.2.1

- **La pasul înapoi**, când fiecărui nod $i \neq$ nodul final n , i se aplică formula:

$$LET(i) = \min_{(i,j)} \{LET(j) - d_{ij}\}$$

în dreptul sfertului din dreapta jos a siglei nodului i se va trece eticheta nodului $\tilde{j}$ în care s-a realizat minimul formulei:

$$LET(i) = LET(\tilde{j}) - d_{i,\tilde{j}}$$

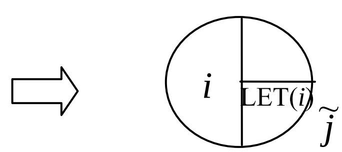


Figura 10.2.2

După efectuarea celor doi paşi – înainte şi înapoi – fiecare nod va avea două etichete suplimentare cu excepția

- nodului final al rețelei care va avea numai o etichetă în dreapta sus;
- nodului inițial al rețelei care va avea numai o etichetă în dreapta jos.

Secvența maximală asociată activității reprezentată prin arcul (i, j) se va determina în două etape:

- din extremitatea **inițială** *i* se va pleca în rețea „spre stânga" urmărind etichetele **superioare**;
- din extremitatea **finală** *j* se va pleca în rețea „spre dreapta" urmărind etichetele **inferioare**.

Exemplul 10.4 În rețeaua coordonatoare a proiectului de referință (figura 9.7) recalculăm termenele nodurilor adăugând şi etichetele suplimentare – vezi figura 10.3

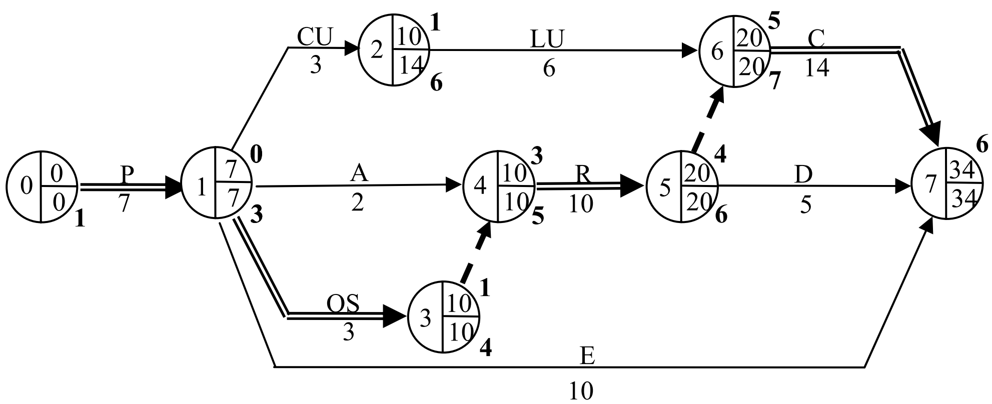


Figura 10.3

Determinarea secvenței maximale asociate activității **R** este ilustrată în figura 10.4:

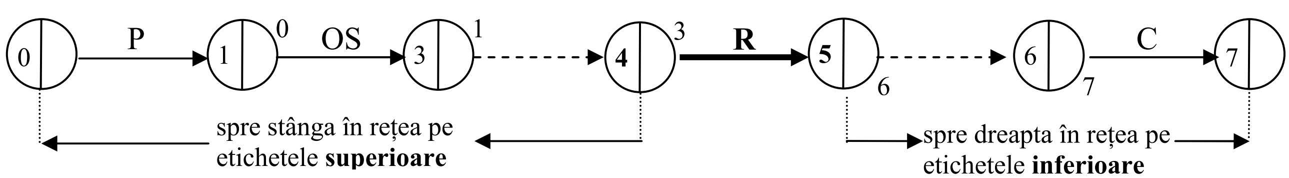


Figura 10.4

Invităm cititorul să regăsească şi celelalte secvențe maximale deja afişate în tabelul 10.2

Pe baza considerațiilor dezvoltate putem formula următoarele concluzii, utile în analiza şi rezolvarea unor situații de actualizare a rețelelor coordonatoare.

Creşterea duratei unei activităţi critice implică creşterea, în aceeaşi măsură a duratei întregului proiect.

Reducerea duratei unei activităţi critice X implică reducerea duratei proiectului dar nu neapărat în aceeaşi măsură. Într-adevăr, este posibil ca prin reducerea duratei lui X, durata secvenţei maximale asociate ≡ actualul drum critic - să scadă sub durata secvenţei maximale „de pe locul doi (ca durată!)" care devine, automat, noul drum critic!

Exemplul 10.5 Dacă în proiectul de referinţă din exemplul 9.4 durata activităţii (critice) R s-a reestimat de la 10 la 12 luni şi durata proiectului se prelungeşte cu încă două luni. Dacă din contră, durata activităţii OS se reduce cu două luni, proiectul se scurtează cu numai o lună deoarece durata secvenţei (P , OS , R , C) scade la 32 luni, sub durata de 33 luni a secvenţei (P , A , R , C) – vezi tabelul 10.2! Noul drum critic va fi (P , A , R , C).
Pe aceeaşi linie, o reducere a duratei lui OS cu o lună combinată cu o creştere a duratei lui R tot cu o lună nu modifică termenul de 34 luni însă „criticizează" activitatea A! Într-adevăr secvenţele maximale (P , OS , R , C) şi (P , OS , R , C) vor avea aceeaşi durată actualizată de 34 luni.

Reducerea duratei unei activităţi necritice nu are nici un efect asupra termenului final ci doar măreşte – în aceeaşi măsură - rezerva sa totală.

Creşterea duratei unei activităţi necritice X în limita rezervei sale totale nu modifică durata proiectului. Într-adevăr, durata secvenţei maximale asociate creşte dar nu depăşeşte durata secvenţei „drum critic". În cazul extrem, când întreaga rezervă totală este epuizată, activitatea X devine critică laolaltă cu celelalte activităţi din secvenţa asociată.

Creşterea duratei unei activităţi necritice X peste rezerva sa totală prelungeşte durata proiectului. Secvenţa maximală asociată devine noul drum critic.

Exemplul 10.6 Singurul efect al reducerii cu două luni a duratei activităţii necritice D din proiectul de referinţă, este creşterea tot cu două luni a rezervei totale.
Rezerva activităţii A este de o lună. Dacă durata lui A creşte cu o lună în reţeaua coordonatoare vor exista două drumuri critice (P , OS , R , C) şi (P , A , R , C), ambele cu durata de 34 luni. În schimb dacă durata activităţii A creşte cu două luni proiectul se prelungeşte cu o lună şi secvenţa maximală asociată (P , A , R , C) devine noul drum critic.

10.2 Diagrama Gantt

Diagrama Gantt – după numele lui Henry Gantt (1861 – 1918), unanim recunoscut drept „părintele" tehnicilor de planificare şi control - **este o modalitate sugestivă de reprezentare a rezultatelor analizei reţelei coordonatoare a unui proiect**, utilă atât în faza de planificare cât mai ales în cea de urmărire a executării acestuia.În esenţă, ea este un „calendar" menit să arate la un moment dat „ce s-a făcut, ce este în curs de execuţie şi ce ar mai trebui făcut".

Exemplul 10.7 În figura 10.5 este dată diagrama Gantt pentru proiectul halei industriale din exemplul 9.4. Fiecare activitate a fost reprezentată printr-un segment orizontal (în negru) a cărui lungime este proporţională cu durata ei. Plasarea segmentului pe axa timpului s-s făcut la termenul cel mai devreme de începere al activităţii (EST), rezultat din calcule şi asta pentru a putea beneficia – la nevoie – de întreaga rezervă totală, evidenţiată de segmentul roşu alăturat.

O secţiune „verticală" în diagramă evidenţiază stadiul „virtual" al lucrărilor. Astfel, la 9 luni de la începerea construcţiei halei, „proiectarea ≡ P" şi „obţinerea avizelor de execuţie ≡ A" ar trebui încheiate în timp ce „emiterea comenzilor pentru utilaje ≡ CU", „organizarea de şantier ≡ OS" şi „instruirea personalului ≡ E" s-ar afla în diferite stadii de realizare.

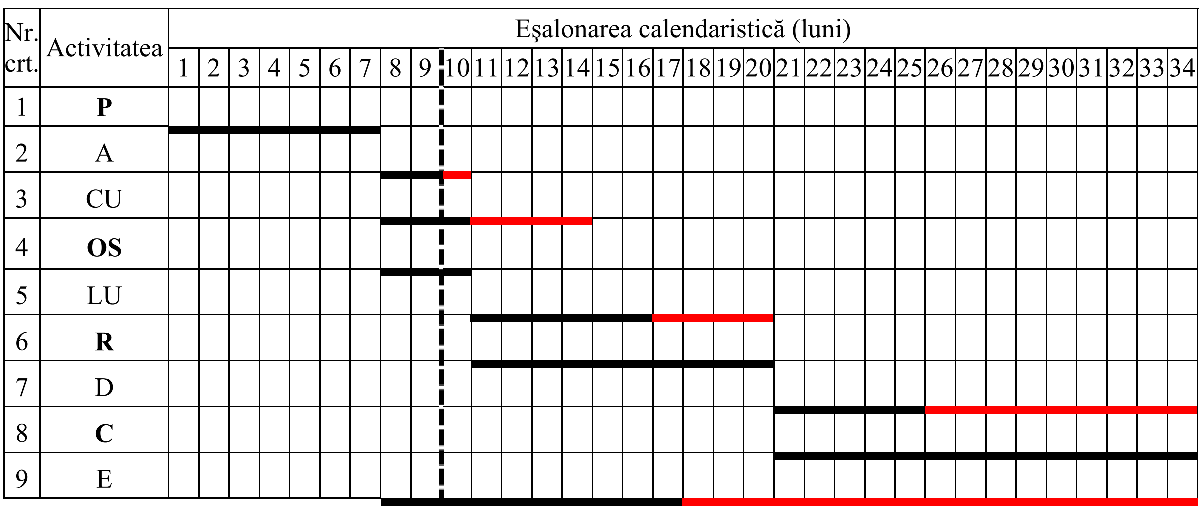


Figura 10.5

Prioritară ar fi menţinerea activităţii critice OS în orarul stabilit în timp ce o eventuală amânare sau întrerupere a derulării activităţilor necritice CU şi E – bineînţeles în limite rezonabile (adică ale rezervelor totale!) – nu ar afecta termenul final al lucrării.

10.3 Actualizarea reţelelor coordonatoare

O dată încheiată faza de planificare a proiectului se poate trece la realizarea sa efectivă. Periodic este necesar să se compare stadiul lucrărilor cu ceeace era planificat să se facă. Într-adevăr, o mulţime de factori, mulţi incontrolabili, cauzează diferenţe între „planificat" şi „realizat" care, dacă nu sunt eliminate la timp pot afecta şi chiar compromite obiectivele urmărite. În asemenea situaţii este important să ştim unde trebuie intervenit (prin măsuri specifice ca de exemplu realocarea de resurse) pentru menţinerea întregii lucrări în orarul stabilit.
Operaţiile întreprinse în scopul rezolvării acestor situaţii sunt reunite sub numele generic de „**actualizare a reţelei coordonatoare**"

Exemplul 10.8 Pentru revizia şi modernizarea unei instalații de epurare a apei s-a elaborat un proiect a cărui listă de activități este dată în tabelul 10.3. Rețeaua coordonatoare AoA este dată în figura 10.6 iar în tabelul 10.4 au fost calculate termenele şi rezervele totale ale activităților proiectului.

Activitatea	Activități direct precedente	Durata (săptămâni)
A	–	10
B	–	12
C	–	13
D	B	8
E	B	14
F	A	16
G	D	9
H	D	20
K	E , F , G	11

Tabelul 10.3

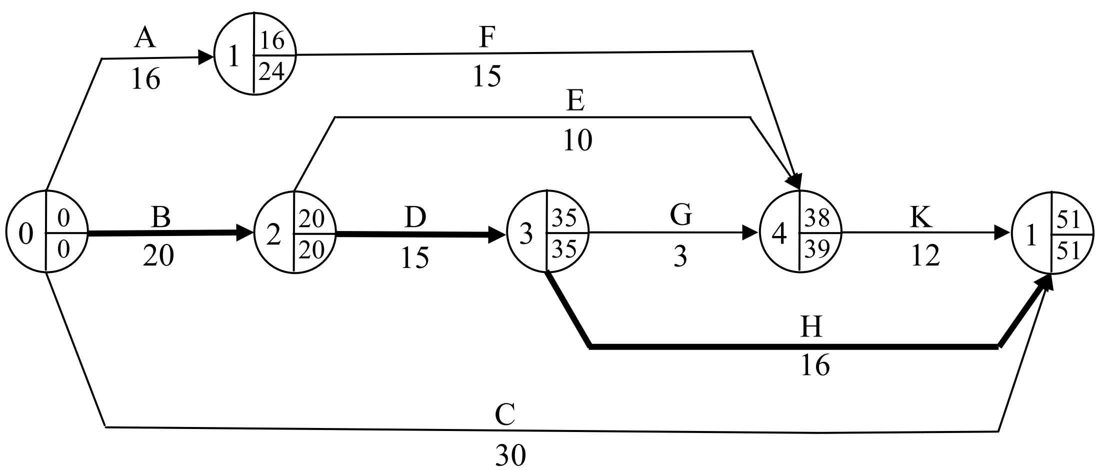


Figura 10.6

Activitate	Durata	Termen de începere		Termen de terminare		Rezerva totală
		EST	LST	EFT	LFT	
A	16	0	8	16	24	8
B	20	0	0	20	20	0
C	30	0	21	30	51	21
D	15	20	20	35	35	0
E	10	20	29	30	39	9
F	15	16	24	31	39	8
G	3	35	36	38	39	1
H	16	35	35	51	51	0
K	12	38	39	50	51	1

Tabelul 10.4

Pe baza acestor elemente s-a întocmit diagrama Gantt care pune în evidenţă eşalonarea în timp a activităţilor proiectului pornind de la termenele lor timpurii de începere – vezi figura 10.7 în care segmentele roşii reprezintă rezervele totale.

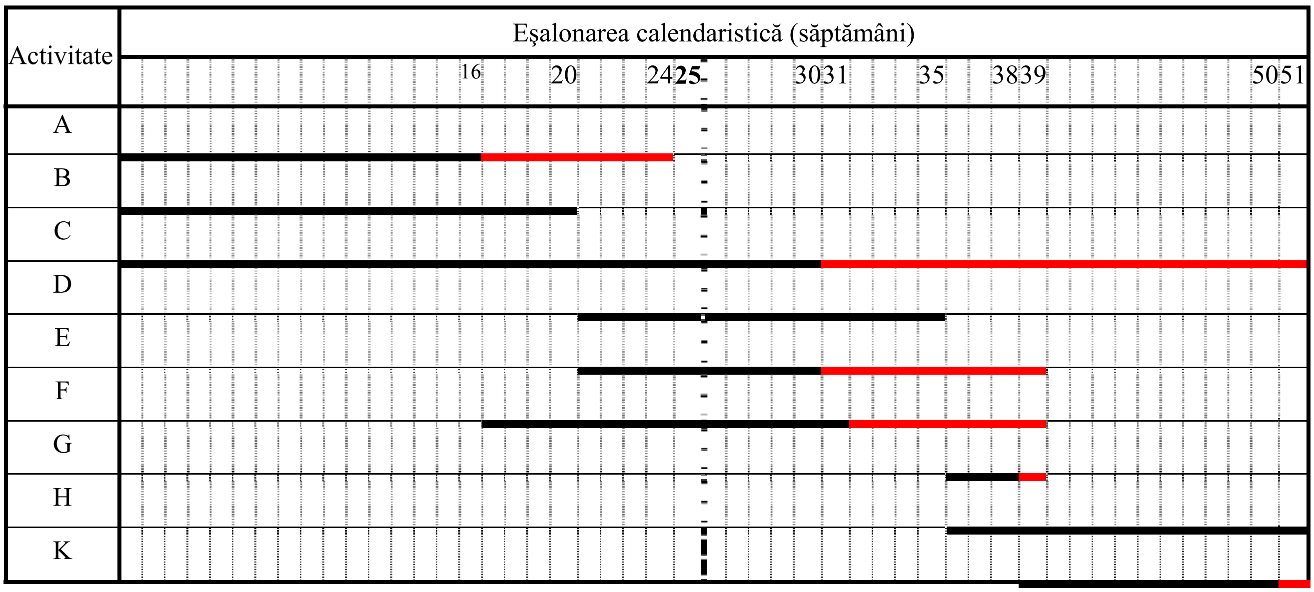


Figura 10.7

Din analiza reţelei coordonatoare rezultă următoarele concluzii generale:

- durata minimă de execuţie a proiectului este de 51 de săptămâni – în ipoteza că duratele activităţilor au fost corect estimate şi că nu sunt probleme în legătură cu resursele necesare;
- Cu prioritate se va monitoriza realizarea activităţilor critice B , D şi H la termenele stabilite;
- mare atenţie trebuie acordată şi activităţilor necritice G şi K a căror rezervă de numai o săptămână, este foarte mică!
- pentru celelalte activităţi, adică pentru A , C , E şi F monitorizarea poate fi mai „lejeră” dar în limitele rezervelor totale. **A nu se uita: consumarea rezervei unei activităşi „criticizează” nu numai activitatea respectivă dar şi pe altele, complicând actul de conducere!**

În toate aceste recomandări s-a presupus, cum este şi firesc, că toate activităţile vor fi începute la termenele **timpurii**, pentru a putea beneficia – în caz de nevoie – de întreaga rezervă totală.

Să presupunem acum că la 25 de săptămâni de la demararea lucrărilor se face o analiză a stadiului execuţiei proiectului, comparându-se „ce s-a realizat” cu „ce era planificat”.
Diagrama Gantt arată cu claritate că la momentul T = 25 al actualizării:

- activităţile A şi B trebuiau terminate;

- din activitatea C trebuia executat un volum de lucrări echivalent cu 25 de săptămâni din durata de 30 de săptămâni. Tot aşa din D , E , F trebuiau „lucrate” 5 , 5 şi respectiv 9 săptămâni din duratele acestor activităţi;
Situaţia „din teren” arată astfel:

- A şi B au fost intr-adevăr terminate dar în executarea activităţii A s-au ivit o serie de dificultăţi neprevăzute care au încetinit serios ritmul de lucru fiind necesară redirecţionarea de urgenţă către A a unor resurse iniţial alocate activităţilor E şi F;
- ca urmare, E şi F n-au fost încă începute şi mai mult, nu se speră ca F să înceapă mai devreme de o săptămână;
- din C s-a realizat 50%;
- activitatea critică D se desfăşoară în orarul stabilit.
- celelalte activităţi n-au fost încă atacate şi îşi menţin duratele iniţiale, cu excepţia activităţii H a cărei durată se prelungeşte cu o săptămână.

Se pune întrebarea dacă în situaţia constatată întreaga lucrare mai poate fi terminată în 51 de săptămâni şi, în caz că întârzierea nu este „excesiv” de mare, „unde trebuie intervenit” pentru ca termenul final să fie respectat.

Tehnica de actualizare poate fi descrisă succint astfel:

- La data actualizării se reestimează duratele activităţilor în curs de execuţie sau care nu sunt încă atacate, în funcţie de situaţia concretă din teren. Pentru activităţile terminate se va lua durata nulă.
- Se recalculează noile termene ale activităţilor şi drumul critic luând în considerare duratele reestimate. Dacă Δ^a este durata drumului critic din reţeaua actualizată atunci $T + \Delta^a$ este noua estimare a duratei proiectului la momentul T al actualizării.
- Două situaţii sunt posibile în raport cu durata planificată Δ:
- $T + \Delta^a \leq \Delta \rightarrow$ (deocamdată) nu sunt necesare măsuri speciale deoarece lucrarea se va încadra în termenul stabilit (fireşte, la o viitoare actualizare s-ar putea ca lucrurile să se schimbe...);
- $T + \Delta^a > \Delta \rightarrow$ termenul final planificat este depăşit şi pentru eliminarea întârzierii sunt necesare măsuri de scurtare a duratelor unor activităţi, în primul rând a acelora de pe drumul critic actualizat. Accelerarea execuţiei implică însă suplimentări sau redistribuiri de resurse şi bineînţeles creşterea costurilor!

În exemplul nostru duratele reestimate ale activităţilor sunt:

d (A) =d (B) = 0 $\leftarrow$ activităţile A şi B sunt terminate;
d (C) = 15 $\leftarrow$ din C s-a realizat 50%;
d (D) = 15 – 5 = 10 $\leftarrow$ D este în orar: s-au „lucrat” 5 săptămâni şi mai rămâne restul!;
d (F) =1+15 =16 $\leftarrow$ deoarece F ar putea începe abia la o săptămână de la momentul actualizării;
d (H) = 1 + 16 = 17 $\leftarrow$ urmare a reestimării duratei;
E , G şi K îşi menţin duratele iniţiale.

Reţeaua actualizată a proiectului studiat este dată în figura 10.8.

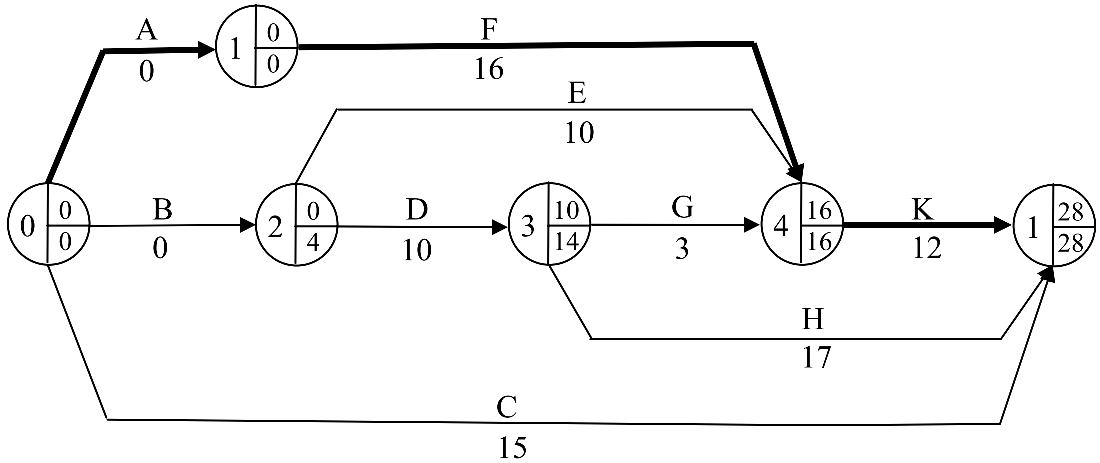


Figura 10.8

Durata actualizată de 28 de săptămâni este de fapt durata executării lucrărilor rămase, în ipoteza că „în viitor nu se mai ivesc alte necazuri”. În consecință, la momentul actualizării T = 25, se estimează că întreaga lucrare va fi gata în 25 + 28 = 53 săptămâni, cu două mai mult decât se planificase inițial. Întârzierea nu este mare şi se poate discuta eliminarea ei.
Mai întâi, trebuie intervenit pe noul drum critic (A , F , K) în care activitatea A este terminată. În secțiunea F s-a subliniat deja că scurtarea duratei unui drum critic nu înseamnă scurtarea **în aceeaşi măsură** a duratei proiectului. În cazul de față, secvența maximală (B , D , H) asociată activității H (şi în care B este terminată!) are o durată de 27 săptămâni astfel că o scurtare a drumului critic (A , F , K) cu două săptămâni reduce durata actualizată cu numai o săptămână! Dacă se reduce şi durata secvenței (B , D , H) cu o săptămână, durata actualizată se reduce la 26 de săptămâni şi întreaga lucrare se va termina în cele 51 de săptămâni planificate inițial. În concluzie echipa de conducere va trebui să ia măsurile adecvate pentru:

- terminarea activităților F şi K „pe total”, cu două săptămâni mai devreme;
- terminarea activităților D şi H „pe total”, cu o săptămână mai devreme.

Cum se vor răsfrânge aceste reduceri asupra duratelor individuale de execuție ale celor patru activități implicate este o chestiune care ține de natura măsurilor ce se vor lua!

Probleme propuse

1. Se consideră proiectul extins de construire a unei hale industriale din exemplul 9.9 pentru care s-a întocmit şi analizat rețeaua coordonatoare din figura 9.12. Discutați efectul asupra termenului final pe care l-ar avea următoarele corecții privitoare la duratele unor activități (fiecare corecție va fi analizată separat!)

- scurtarea duratei activității R_2 de la 5 la 3 luni;
- creşterea duratei activității OS_1 de la o lună la 3 luni;
- scurtarea duratei activității critice C_2 de la 10 la 9 luni;

- scurtarea duratei activității critice LU de la 6 la 3 luni;
- creşterea duratei activității OS_1 de la o lună la 3 luni şi a duratei activității R_1 de la 5 la 7 luni.

2. Compania ASPIR este specializată în producerea de aparate electrocasnice. Recent, departamentul de cercetare – dezvoltare a propus conducerii fabricarea unui nou tip de aspirator portabil, alimentat de la o baterie reîncărcabilă. În propunere se aprecia că portabilitatea şi absența cablului de alimentare cu curent vor face produsul atractiv şi că, dacă el va fi realizat la un preț rezonabil ar putea duce la întărirea prezenței companiei pe piața articolelor de profil.
Conducerea companiei a găsit ideea ca fiind foarte interesantă şi a cerut elaborarea unui studiu de fezabilitate. Întocmirea raportului final necesită însă o mare diversitate de informații precum şi acțiunea conjugată a mai multor departamente de specialitate ale companiei.Au fost identificate activitățile majore pentru care s-au precizat condiționările temporale şi s-au estimat duratele de realizare (tabelul 10.5)

Nr. crt.	Descrierea activității	Codul activității	Activități direct precedente	Durata (săptămâni)
1	Elaborarea documentației tehnice pentru fabricarea noului produs	A	–	6
2	Elaborarea planului de cercetare a pieței	B	–	2
3	Proiectarea fluxului tehnologic	C	A	3
4	Fabricarea prototipului	D	A	5
5	Redactarea broşurii de prezentare şi promovare a noului produs	E	A	3
6	Estimarea costurilor de fabricație	F	C	2
7	Testarea preliminară a procesului de producție	G	D	3
8	Cercetarea pieței de desfacere	H	B , E	4
9	Întocmirea raportului de evaluare a prețului şi de previzionare a vânzărilor	I	H	2
10	Elaborarea raportului final	J	F , G , I	2

Tabelul 10.5

i) Desenați rețeaua coordonatoare AoA;
ii) Determinați durata minimă de execuție şi identificați activitățile critice;
iii) Calculați termenele activităților şi rezervele totale ale acestora;
iv) Desenați diagrama Gantt. Discutați „rigiditatea în execuție" a proiectului.

Unitatea de învățare 11

ANALIZA DRUMULUI CRITIC

Rețeaua coordonatoare AoN a unui proiect. Dependențe multiple

---

Cuprins

11.1 Reprezentarea AoN a structurii unui proiect

11.1.1 Instrucțiuni de reprezentare AoN

11.1.2 Calculul termenelor activităților. Drumul critic

11.2 Dependențe multiple

11.2.1 Definiții

11.2.2 Calculul termenelor activităților. Drumul critic

Probleme propuse

11.1 Reprezentarea AoN a structurii unui proiect

În reprezentarea AoN activitățile proiectului se identifică cu nodurile rețelei coordonatoare. Arcele acesteia pun în evidență precedențele directe dintre activități.

Pentru termenele activităților păstrăm notațiile introduse în secțiunea 9.5.5 Ilustrările vor fi făcute pe datele proiectului din următorul:

Exemplul 11.1. Compania X este deținătoarea unui mare complex comercial în care 32 de firme de profil îşi desfăşoară activitatea pe baza unor contracte de închiriere a spațiilor necesare. Recent, conducerea companiei a luat în studiu un proiect de extindere a complexului prin care se speră atragerea a încă 8 – 10 noi clienți interesați în dezvoltarea unor afaceri comerciale. Finanțarea extinderii a fost deja asigurată de un investitor privat. În tabelul 11.1 este dată lista principalelor activități ce compun acțiunea de extindere împreună cu duratele estimate (în săptămâni) şi precedențele directe.

Nr. crt.	Descrierea activității	Codul activității	Activități direct precedente	Durata (săptămâni)
1	Elaborarea schițelor şi a planurilor de construcție pentru extindere	A	_	5
2	Identificarea potențialilor clienți care vor închiria noile spații construite	B	_	6
3	Elaborarea ofertei către noii clienți	C	A	4
4	Alegerea constructorului	D	A	3
5	Elaborarea avizelor pentru construcție	E	A	1
6	Obținerea aprobărilor pentru construcție din partea autorităților	F	E	4
7	Construcția propriu zisă	G	D , F	14
8	Finalizarea contractelor de închiriere cu noii clienți	H	B , C	12
9	Instalarea noilor clienți în spațiile închiriate	I	G , H	2

Tabelul 11.1

11.1.1 Instrucțiuni de reprezentare AoN

- O activitate A este reprezentată printr-un dreptunghi compartimentat ca în diagrama din figura 11.1

Faptul că activitatea A precede direct activitatea B va fi reprezentat prin diagrama din figura 11.2:

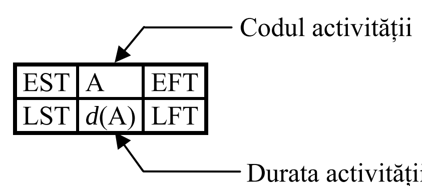


Figura 11.1

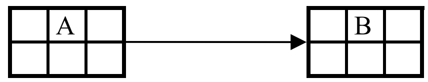


Figura 11.2

Folosirea reprezentării AoN presupune:

- **Existența unei singure activități inițiale** (adică fără activități predecesoare). Dacă în proiect există mai multe activități inițiale se va adăuga o **activitate fictivă cu durata zero** şi notată cu *, care precede toate activitățile inițiale reale.
- **Existența unei singure activități finale** (adică fără activități succesoare). Dacă în proiect există mai multe activități finale se va adăuga o **activitate fictivă cu durata zero** şi notată cu **, direct precedată de toate activitățile finale reale.

Exemplul 11.2 Reprezentarea AoN a structurii proiectului din exemplul 11.1 este dată în figura 11.3

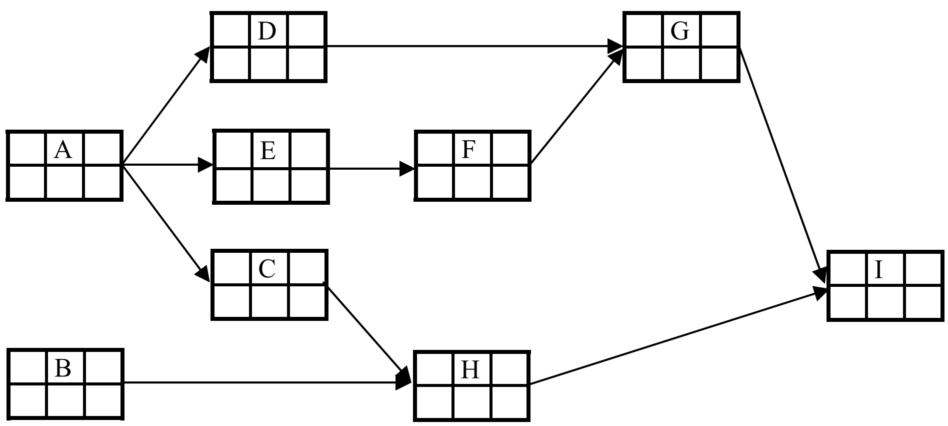


Figura 11.3

Proiectul are două activități inițiale A şi B şi o singură activitate finală, I. Completăm desenul cu încă o activitate, fictivă cu durata zero care precede direct activitățile inițiale reale A şi B. Obținem rețeaua coordonatoare AoN din figura 11.4

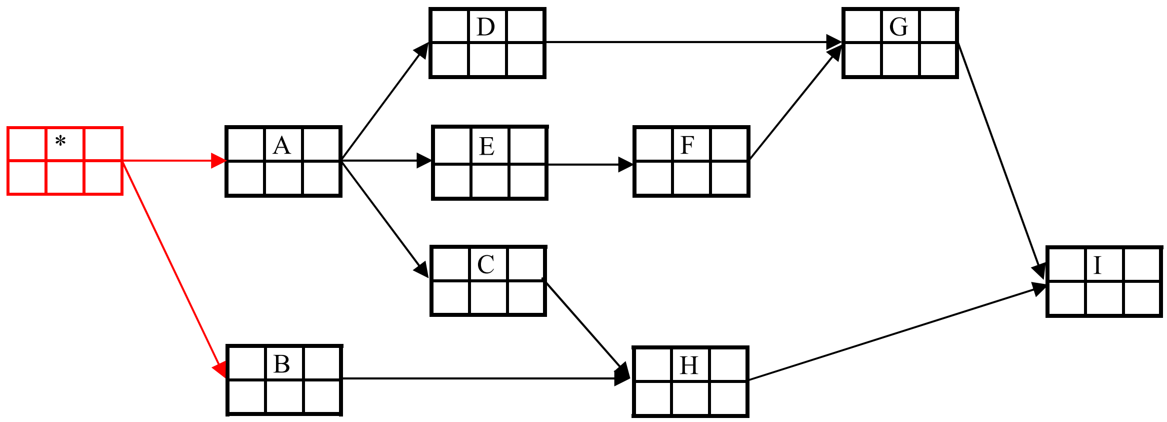


Figura 11.4

11.1.2 Calculul termenelor activităților. Drumul critic

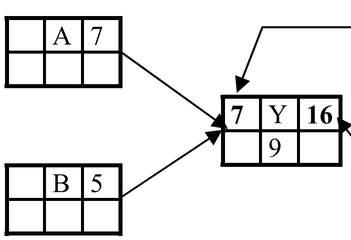
În esență, analiza rețelei coordonatoare AoN a unui proiect coincide cu cea a rețelei AoA corespunzătoare, diferă numai forma de prezentare. Astfel:

I) În pasul înainte, de la nodul inițial către cel final, se calculează termenele timpurii de începere şi terminare ale activităților, după schema iterativă:

- pentru (unica) activitate inițială I – reală sau fictivă – se va lua:

$EST(I) = 0$, $EFT(I) = EST(I) + d(I) = d(I)$ - am notat cu $d(X)$ durata activității X.

- pentru orice activitate Y ≠ activitatea inițială I, se aplică judecata din următorul exemplu:



$EST(Y) = \max\{EFT(A) = 7, EFT(B) = 5\} = 7$

(deoarece o activitate nu poate începe **mai devreme** de terminarea unei activități care o precede!)

$EFT(Y) = EST(Y) + d(Y) = 7 + 9 = 16$

Figura 11.5

La terminarea pasului înainte, vom cunoaşte durata minimă de execuție a proiectului; ea este dată de termenul timpuriu de terminare al (unicei) activități finale!

II) În pasul înapoi, de la nodul final către cel inițial, se calculează termenele târzii de începere şi terminare ale activităților, după schema iterativă:

- pentru (unica) activitate finală F – reală sau fictivă – se va lua:

$$LFT(F) = EFT(F) \quad , \quad LST(F) = LFT(F) - d(F)$$

- pentru o activitate oarecare X, diferită de activitatea finală F, se aplică judecata din exemplul următor:

$$LFT(X) = \min\{LST(A) = 23, LST(B) = 19\} = 19$$

(deoarece o activitate nu se poate termina **mai târziu** de momentul începerii unei activități pe care o precede!)

$$LST(X) = LFT(X) - d(X) = 19 - 6 = 13$$

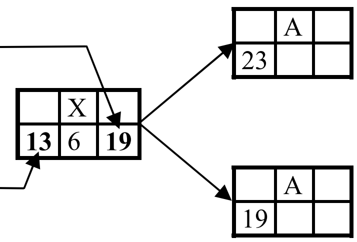


Figura 11.6

La terminarea pasului înapoi vom cunoaşte activitățile care condiționează nemijlocit termenul final al proiectului. Este vorba de activitățile critice, caracterizate prin aceea că termenele lor de începere sau de terminare, timpuriu şi târziu, coincid.

Exemplul 11.3 Calculele termenelor activităților proiectului din exemplul 11.1 sunt afişate în figura 11.7.

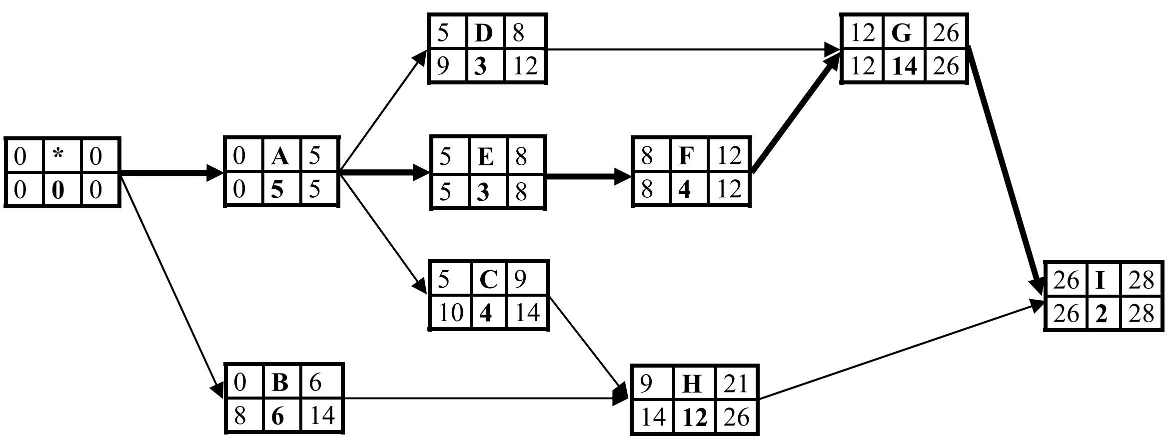


Figura 11.7

Concluzii:

Durata minimă de execuție a proiectului este de 28 de săptămâni. Activitățile critice (reale) sunt A , E , F , G şi I.

Rezerva totală a unei activități se citeşte din rețea ca diferență a termenelor de începere, timpuriu şi târziu – egală şi cu diferența termenelor de terminare, timpuriu şi târziu.
De exemplu, rezerva activității C este de 10 – 5 = 14 – 9 = 5 săptămâni.

Identificarea secvențelor maximale asociate activităților proiectului se face cu acelaşi procedeu de etichetare explicat în secțiunea 10.1 dar adaptat specificului reprezentării AoN:

- etichetele „superioare” se pun la pasul înainte – în colțul din stânga sus – şi rețin a ctivitățile în care se realizează maximul formulei din figura 11.5
- etichetele „inferioare” se pun la pasul înapoi – în colțul din dreapta jos – şi rețin a ctivitățile în care se realizează minimul formulei din figura 11.6

În figura 11.8 s-a reluat calculul termenelor activităților proiectului de referință (făcut deja în figura 11.7) aplicându-se totodată şi procedeul de etichetare.

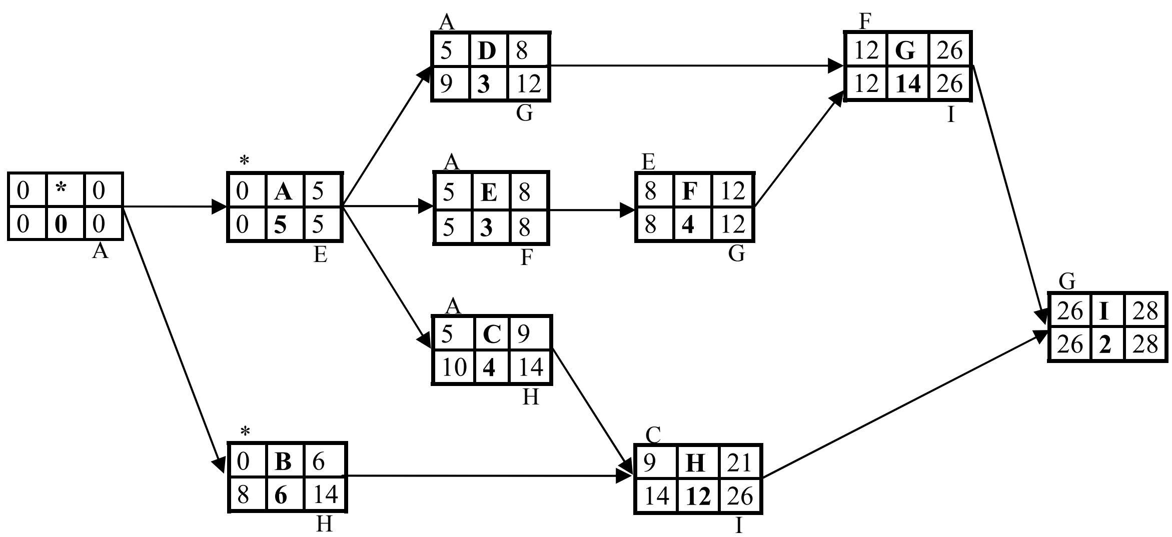


Figura 11.8

În tabelul 11.2 sunt date secvențele maximale asociate tuturor activităților proiectului de referință, duratele secvențelor şi rezervele totale ale activităților.

Activitate	Secvența maximală asociată	Durata secvenței	Rezerva totală a activității
A , E , F , G , I	$* \to A \to E \to F \to G \to I$	28	0
D	$* \to A \to D \to G \to I$	24	4
C , H	$* \to A \to C \to H \to I$	23	5
B	$* \to B \to H \to I$	20	8

Tabelul 11.2

11.2 Dependențe multiple

Să considerăm două activități A şi B ale unui proiect. Până acum, dependența (directă) a activității B față de A a însemnat că B poate începe (imediat) după terminarea lui A. Prin urmare, această dependență lega terminarea activității A de începutul activității B.
Practica a impus şi alte tipuri de dependență care vor fi descrise în continuare.

11.2.1 Definiții

I) Dependența **terminare – început** (finish to start) sau **normală**

Activitatea B nu poate începe mai înainte de terminarea activității A

În reprezentarea AoN acest tip de dependență se notează astfel:

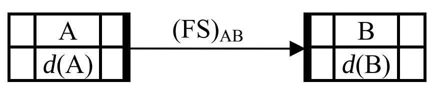


Figura 11.9.1

unde s-a notat cu $(FS)_{AB}$ un interval minim de timp, prestabilit, dintre momentul terminării activității A şi momentul începerii activității B.

Exemplu: „Turnarea betonului ≡ B” nu poate începe mai înainte de terminarea „săpării fundației ≡ A”

În cazul $(FS)_{AB} = 0$ regăsim dependența directă uzuală folosită până acum.Reprezentarea AoA a dependenței „terminare – început” necesită introducerea unei „extra activități” cu durata egală cu întârzierea $(FS)_{AB}$ dintre terminarea lui A şi începutul lui B (figura 11.9.2).

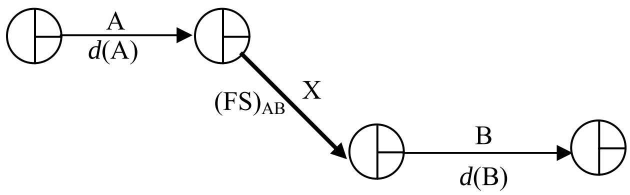


Figura 11.9.2

II) Dependența **început – început** (start to start)

Activitatea B nu poate începe mai înainte de începerea activității A

Din nou, reprezentarea AoN este foarte sugestivă:

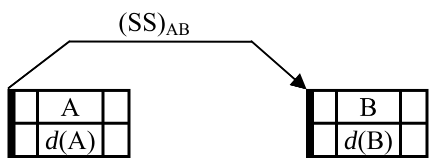


Figura 11.10.1

unde $(SS)_{AB}$ este intervalul minimde timp (prestabilit) dintre momentele de începere ale celor două activități.

Reprezentarea AoA este mai greoaie:

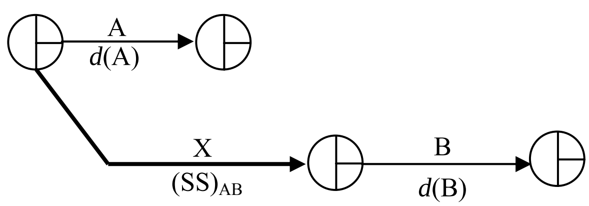


Figura 11.10.2

Observație: $(SS)_{AB} = 0$ înseamnă că activitatea B poate începe chiar odată cu A (dar nu mai înainte!).
Exemplu: într-o acțiune de reîmpădurire, „plantarea puieților ≡ B” nu poate începe mai înainte de „săparea gropilor ≡ A” în care vor fi puşi puieții (trebuie săpate câteva gropi, nu?)

III) Dependența **terminare – terminare** (finish to finish)

Activitatea B nu se poate termina mai înainte de terminarea activității A

Reprezentările AoN şi AoA arată astfel:

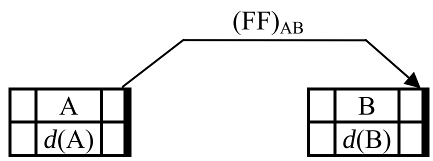


Figura 11.11.1

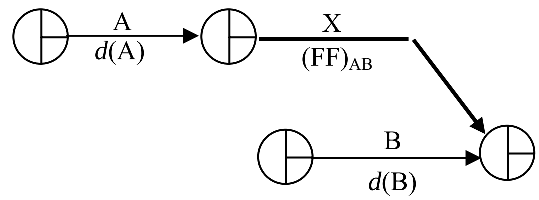


Figura 11.11.2

$(FF)_{AB}$ este un interval minim de timp,prestabilit, între momentele de terminare ale celor două activități.
Exemplu**:** „Scrierea unui roman ≡ B” nu se poate socoti încheiată mai înainte de terminarea „scrierii ultimului capitol al cărții ≡ A”
Observație: $(FF)_{AB} = 0$ înseamnă că B se poate termina în acelaşi timp cu A, dar nu mai înainte!

IV) Dependența **început – terminare** (start to finish)

Activitatea B nu se poate termina mai înainte de începerea activității A

Diagramele AoN şi AoA ale acestei dependențe sunt:

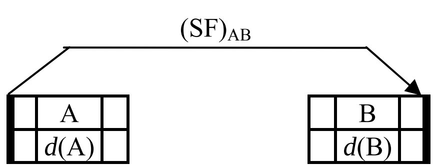


Figura 11.12.1

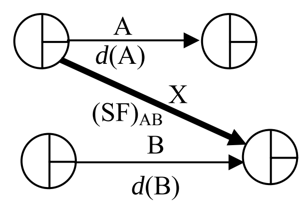


Figura 11.12.2

unde $(SF)_{AB}$ este un interval minim de timp, prestabilit, între momentul începerii activității A şi momentul terminării activității B.
Exemplu: într-o uzină cu activitate neîntreruptă, terminarea „activității unui schimb de lucru ≡ B” nu poate avea loc mai înainte de începerea „activității schimbului următor ≡ A” din cauza operațiilor de predare – primire a utilajelor şi a sarcinilor curente de serviciu!

Observații finale

Diagramele de mai sus arată clar că reprezentarea AoA este mai puțin flexibilă în vizualizarea acestor dependențe necesitând introducerea unor noi activități cu semnificația generală de întârzieri.

Nu sunt excluse situațiile în care între două activități sunt date simultan mai multe dependențe ca în diagrama din figura 11.13

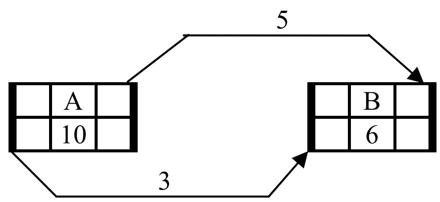


Figura 11.13

în care sunt reprezentate două activități A şi B cu duratele 10 respectiv 6 zile. Ele trebuie astfel planificate încât:

- între începutul lui A şi începutul lui B să treacă cel puțin 3 zile;
- între terminarea lui A şi terminarea lui B să treacă cel puțin 5 zile.

Reprezentarea AoN a unui proiect în care există dependențe de tipul celor descrise mai sus se face după aceleaşi reguli folosite pentru proiectele cu dependențe uzuale (normale). Se va ține cont ca în reprezentare să existe o unică activitate inițială şi o unică activitate finală. Dacă în proiect există mai multe activități inițiale (finale) se va introduce o activitate fictivă $*$ cu durata zero care va preceda normal (va fi precedată normal de) toate activitățile inițiale (finale)

Exemplul 11.4 Analizăm proiectul dat prin următoarea listă de activități

Activitatea	Durata (zile)	Tipul dependenței şi întârzierea (zile)
A	10	–
B	24	–
C	8	$(SS)_{AC} = 1$; $(FF)_{AC} = 0$
D	12	$(FF)_{AD} = 4$
E	14	$(FS)_{DE} = 10$; $(FS)_{CE} = 4$
F	16	$(SS)_{EF} = 16$; $(FS)_{BF} = 0$
G	20	$(SS)_{FG} = 2$; $(FF)_{FG} = 4$
H	22	$(SS)_{GH} = 6$; $(FF)_{GH} = 10$

Tabelul 11.3

Comentarii: Lista conține numai dependențe de tipul FS (normale), SS şi FF.Există şi cupluri de activități între care există două tipuri de dependență. De exemplu, executarea activității G este condiționată de cea a activității F în două moduri:

- activitatea G poate începe imediat ce au trecut 2 zile de la începerea executării activității F;
- terminarea activității G trebuie să aibe loc la cel puțin 4 zile de la terminarea activității F.

Proiectul are două activități inițiale A şi B al căror început sau sfârşit nu este condiționat de nici o altă activitate. Un statut aparte are activitatea D care condiționează prin terminarea ei începutul activității E dar al cărei început nu depinde de nici o altă activitate. Prin urmare activitatea D poate începe odată cu întreg proiectul!

Activitatea H nu condiționează nici o altă activitate din proiect nici prin începutul şi nici prin sfârşitul ei. Pe de altă parte, activitatea E condiționează prin începutul ei startul activității F, dar terminarea ei nu afectează nici o altă activitate din proiect. Este firesc să admitem că activitatea E poate fi întreruptă sau prelungită astfel încât terminarea ei să coincidă cu terminarea întregului proiect!

Observațiile de mai sus motivează următoarele definiții: o activitate se va numi **semiinițială** dacă începutul ei nu este condiționat de nici o altă activitate din proiect. Evident, o activitate inițială – adică o activitate ale cărei momente de începere şi terminare nu sunt condiționate de nici o altă activitate – este şi semiinițială. O activitate se va numi **semifinală** dacă terminarea ei nu condiționează vreo altă activitate.Orice activitate finală, deci o activitate care nu afectează pe celelalte nici prin început şi nici prin sfârşit, este şi semifinală.

În concluzie, proiectul dat are două activități inițiale A şi B şi o activitate semiinițială, D. Ca urmare în rețeaua AoN se va introduce o activitate fictivă de start $*$ care va precede normal şi fără întârziere activitățile A , B şi D.
Proiectul are o activitate finală H şi o alta semifinală, E ; în consecință, rețeaua AoN va fi completată cu o altă activitate fictivă $*\,*$ cu semnificația de terminare a proiectului, precedată normal şi fără întârziere de H şi E.

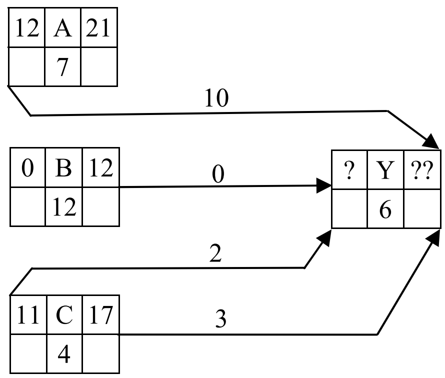
Rețeaua AoN a proiectului este redată în figura 11.16, împreună cu termenele activităților, calculate conform explicațiilor din următoarea subsecțiune.

11.2.2 Calculul termenelor activităților.Drumul critic

Într-o rețea AoN cu multiple dependențe, calculul termenelor activităților urmează aceleaşi instrucțiuni folosite în rețelele cu dependențe normale.

I) La pasul înainte se calculează termenele timpurii de începere şi terminare ale activităților. Principiul schemei iterative de calcul este acelaşi doar că trebuie să ținem seama de tipul condiționărilor impuse unei activități din partea celorlalte!

Pentru edificare să studiem situația din figura 11.14 în care avem de calculat termenele EST şi EFT ale activității Y.



EST(Y) = max{12 + 0 , **11 + 2**}= **13**
EFT(Y) = max{12 + 10 , 17 + 3 , **13 + 6**}= **22**

Figura 11.14

Începerea activității Y este condiționată de sfârşitul lui B şi începutul lui C. **Deoarece un eveniment nu se poate produce mai înainte de satisfacerea tuturor condițiilor impuse de evenimente deja petrecute** urmează că

$$EST(Y) = \max\{12 + 0 , 11 + 2\}= 13$$

La calcularea termenului timpuriu de terminare al activității Y va trebui să ținem cont nu numai de condițiile impuse de începutul lui A şi terminarea lui C **dar şi de propriul ei termen timpuriu de începere deja calculat**, de unde

$$EFT(Y) = \max\{12 + 10 , 17 + 3 , \mathbf{13 + 6}\}= 22.$$

La terminarea calculelor pasului înainte, termenul timpuriu de terminare al activității finale din rețea indică durata proiectului.

II) **La pasul înapoi se vor determina termenele târzii de începere şi terminare ale activităților.**

Schema de calcul este ilustrată prin studiul situației din figura 11.15 în care se cere evaluarea termenelor LFT şi LST pentru activitatea X.
Terminarea activității X condiționează momentul începerii activității B şi momentul terminării activității C. Deoarece LST(B) =35 şi LFT(C) = 49 urmează că X nu se poate termina mai târziu de momentul 35 – 1 = 34 respectiv de momentul 49 – 10 = 39 de unde relația

$$LFT(X) = \min\{35 - 1 , 49 - 5\}= 34.$$

La calcularea termenului târziu de începere al activității X vom ține seama de condiționările pe care începerea lui X le impune activităților A şi C **dar şi propriului moment de terminare** astfel că

$$LST(X) = \min\{51 - 18 , 28 - 10 , \mathbf{34 - 14}\}= 18$$

LFT(X) = min{**35 - 1** , 49 - 5}= **34**
LST(X) = min{51 - 18 , 28 - 10 , **34 - 14**}= **18**

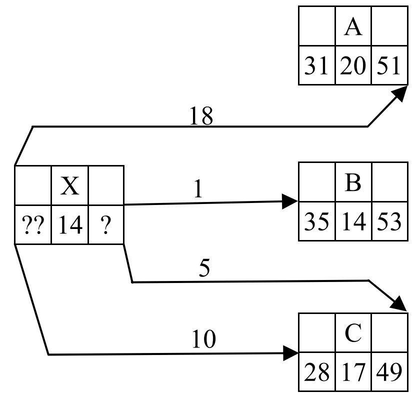


Figura 11.15

Observație: în prezența dependențelor multiple nu este obligatoriu ca diferențele între termenele de terminare şi începere ale unei activități EFT – EST, LFT – LST să coincidă cu durata activității respective!

Termenele activităților proiectului de referință din exemplul 11.4 sunt date în figura 11.16

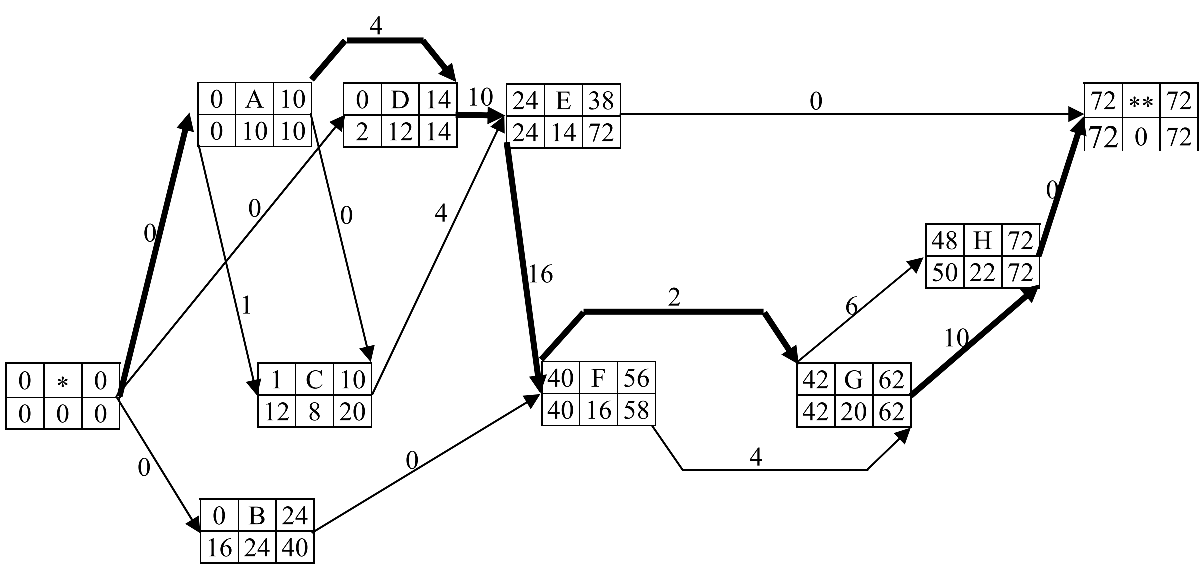


Figura 11.16

Concluzii:

Durata minimă de execuție a proiectului de referință este de 72 zile.

Rețeaua coordonatoare din figura 11.16 pune în evidență un fapt interesant, ne mai întâlnit în rețelele AoA şi AoN uzuale.
Termenele de începere, timpuriu şi târziu ale activității E coincid, dar cele târzii diferă! Concluzia logică care se degajă este că pentru respectarea termenului final al proiectului este neapărat necesar ca E să înceapă la 24 (= EST = LST) de zile de la începerea execuției proiectului, terminarea ei putând avea, funcție de condițiile concrete de lucru, „undeva” între momentul 38 (zile de la începerea proiectului) şi 72 (sfârşitul proiectului). În aceeaşi situație se află activitățile F şi H ale căror termene de respectat „cu sfințenie” – adică cu prioritate: sunt cel de începere, respectiv cel de terminare! Prin contrast, executarea activității G condiționează nemijlocit termenul final al proiectului atât prin momentul ei de începere (42 = EST = LST) cât şi prin cel e terminare (62 = EFT = LFT). În aceeaşi situație se află şi activitatea A.
În concluzie, utilizarea dependențelor multiple are ca efect „nuanțarea”conceptului de acticitate critică. Ca urmare, vom spune că o activitate X este **semicritică** dacă

$$\text{EST(X)} = \text{LST(X)} \ \ \textbf{sau} \ \ \text{EFT(X)} = \text{LFT(X)}$$

Ca de obicei, vom spune că X este o activitate **critică** dacă

$$\text{EST(X)} = \text{LST(X)} \ \ \textbf{şi} \ \ \text{EFT(X)} = \text{LFT(X)}$$

În proiectul de referință, numai activitățile A şi G sunt critice în timp ce activitățile D , E , F şi H sunt semicritice.

Durata de execuție a proiectului este egală cu suma duratelor activităților critice la care se adaugă întârzierile aferente activităților semicritice. În cazul concret analizat

$$T^* = d(A) + (FF)_{AD} + (FS)_{DE} + (SS)_{EF} + (SS)_{FG} + d(G) + (FF)_{GH} =$$
$$= 10 + 4 + 10 + 16 + 2 + 20 + 10 = 72$$

Pentru rezerva totală a unei activități X avem formula:

$$\text{Rezerva totală a activității X} = \max\{LST(X) - EST(X)\, , LFT(X) - EFT(X)\}$$

care extinde definiția dată în secțiunea 11.1.2 pentru cazul precedențelor directe uzuale. Ea se poate interpreta ca maximul de timp ce poate fi adăugat – funcție de necesități – la durata activității. De exemplu, rezerva activității C este de $11 = \max\{12 - 1\, , 20 - 10\}$ zile. Dacă C ar începe la cel mai devreme moment 1 = EST(C), am avea la dispoziție 8+11= 19 zile pentru executare.În schimb, dacă C ar începe la momentul 7, până la termenul cel mai târziu de terminare ar mai fi doar 20 – 7 =13 zile şi durata lui C poate fi prelungită cu cel mult 13 – 8 = 5 zile. Activitățile semicritice, cu un singur termen ferm fie de începere fie de terminare, au o anumită rezervă de timp. De exemplu, activitatea semicritică

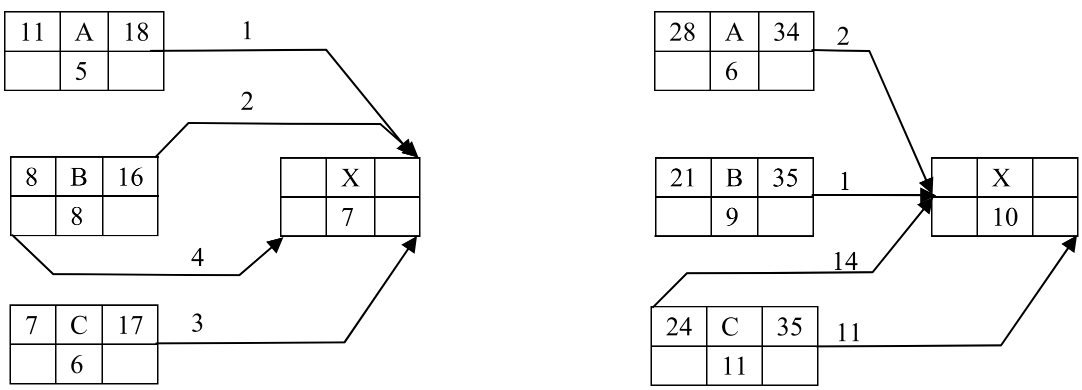
F are o rezervă de două zile. Ea trebuie începută la termenul ferm 40 şi după aceea se poate admite o prelungire a duratei sale cu maximum două zile! Ca şi până acum rezerva unei activități critice este zero.

Probleme propuse

1. Pentru proiectele ale căror liste sunt date în tabelul 9.6 (unitatea de învățare 9):

- trasați rețeaua AoN;
- calculați termenele activităților şi drumul critic.

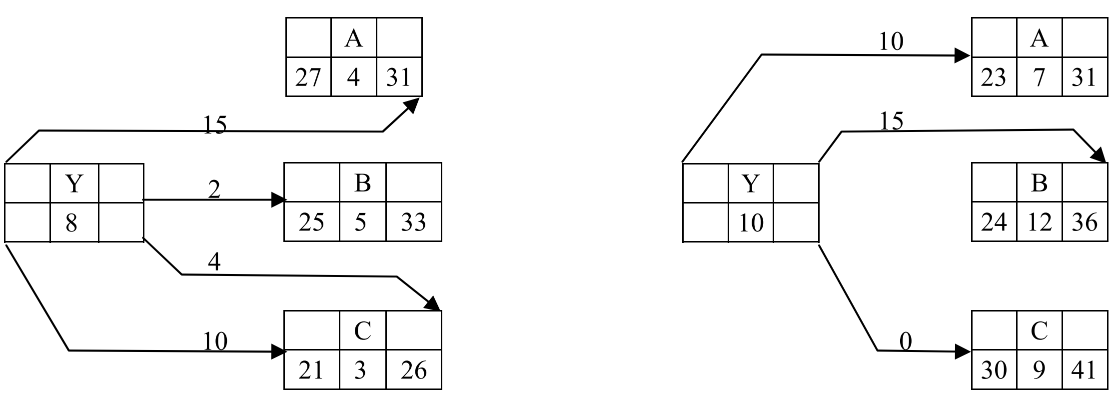
2. Să se calculeze termenul timpuriu de începere EST şi termenul timpuriu de terminare EFT pentru activitatea X din diagramele date în figura 11.17



a) b)

Figura 11.17

3. Să se calculeze termenul târziu de începere LST şi termenul târziu de terminare LFT pentru activitatea Y din diagramele date în figura 11.18



a) b)

Figura 11.18

4. Se consideră proiectul dat prin lista de activități din tabelul 11.4

Trasați rețeaua coordonatoare AoN. Identificați activitățile inițiale, semiinițiale, finale și semifinale.

Determinați durata minimă a proiectului, activitățile critice şi semicritice.

Calculați rezervele totale ale activităților din proiect.

Activitatea	Durata (săptămâni)	Condiționări
A	7	–
B	3	–
C	5	$(FF)_{AC} = 1$; $(SF)_{BC} = 9$
D	4	$(FS)_{AD} = 0$; $(SS)_{CD} = 3$
E	8	$(FS)_{CE} = 0$; $(SS)_{BE} = 6$
F	6	$(SS)_{DF} = 8$
G	3	$(FS)_{CG} = 2$; $(FF)_{EG} = 2$
H	2	$(FF)_{FH} = 4$; $(FS)_{GH} = 0$

Tabelul 11.4

5. (Sursa IBM) S-a decis producerea unui nou tip de unitate centrală şi, într-o discuție preliminară de planificare s-au identificat activitățile din tabelul 11.5

Nr. crt.	Descrierea activității	Codul activității	Durata (zile)
1	Elaborarea unui plan inițial	A	16
2	Stabilirea setului de date inițiale	B	6
3	Generarea, sortarea şi introducerea datelor inițiale	C	3
4	Rularea datelor inițiale	D	8
5	Perfecționarea planului inţial ca urmare a primei rulări	E	8
6	Revizuirea structurii datelor inițiale ca urmare a primei rulări	F	2
7	Generarea, sortarea şi introducerea datelor revizuite	G	1
8	Rularea datelor revizuite	H	8
9	Elaborarea programului de firmă ca rezultat al rulării datelor revizuite	J	4
10	Aprobarea de către conducere a programului de firmă realizat	K	4

Tabelul 11.5

Dacă aceste activități s-ar desfăşura una după alta – cum de altfel este şi plauzibil! – timpul necesar ar fi de 60 de zile.Această durată s-a considerat a fi prea mare drept care s-a convenit asupra unei noi întâlniri de planificare, în cadrul căreia s-au degajat următoarele concluzii:

- activitatea B (stabilirea setului de date inițiale) ar putea începe la şase zile de la începerea elaborării planului inițial (activitatea A) iar cele două activități s-ar putea termina în acelaşi timp;
- activitatea C ar putea începe la două zile de la începerea activității B dar terminarea ar trebui să aibe loc la cel puțin o zi după terminarea lui B;
- activitatea F ar putea începe de îndată ce jumătate din activitatea E ar fi realizată, cele două activități putând fi terminate în acelaşi timp;
- activitatea G ar putea începe odată cu activitatea F şi cele două activități ar putea fi terminate în acelaşi timp.

Identificați toate tipurile de dependență existente între activitățile proiectului dat;

Desenați rețeaua AoN cu dependențe multiple;

Care este timpul minim de execuție al proiectului? În ce măsură una sau alta dintre activități condiționează termenul final?

Unitatea de învățare 12

ANALIZA DRUMULUI CRITIC
Optimizări cost – durată. Alocarea resurselor

Cuprins

11.1 Optimizări cost – durată
- **12.1.1 Preliminarii**
- **12.1.2 Durată prestabilită la un cost minim**
- **12.1.3 Durată minimă în limita unui buget prestabilit**

11.2 Alocarea resurselor
- **12.2.1 Preliminarii**
- **12.2.2 Rezolvarea unui conflict de resurse**
- **12.2.3 O euristică de alocare a resurselor**

Probleme propuse

12.1 Optimizări cost – durată

În problemele de planificare a acțiunilor complexe, **timpul**, reprezentat prin duratele activităților, este un factor deosebit de important din punct de vedere economic şi toate considerațiile şi analizele dezvoltate în secțiunile precedente au avut în vedere, în exclusivitate, acest factor.
Alături de timp, **costul** executării unei acțiuni complexe este un alt factor de care trebuie să se țină seama în planificare.

12.1.1 Preliminarii

Admitem că fiecărei activități din proiect i s-a stabilit o **durată normală** de execuție **dn** implicând un cost acceptabil **cn** şi o **durată accelerată da** < **dn** realizabilă la un cost mai ridicat **ca** > **cn**. Durata **d** luată în calcul la planificare se situează între cele două limite **da** şi **dn**, costul asociat **c** fiind presupus – pentru simplitate – a depinde liniar de **d** (figura 12.1)

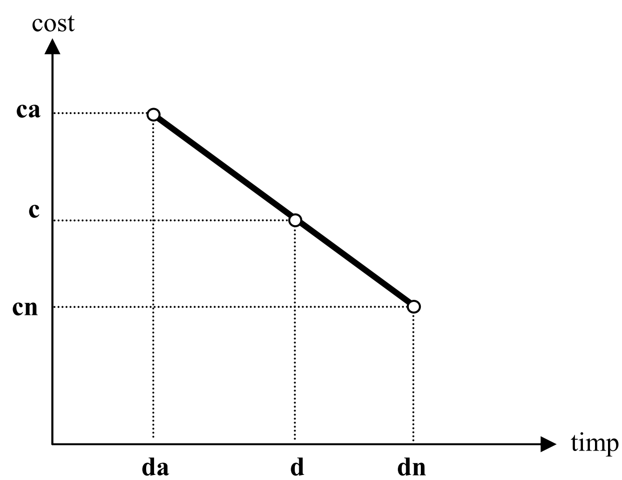


Figura 12.1

Ipoteza variației liniare a costului permite introducerea **costului unitar de accelerare** (în unități monetare pe unitatea de timp)

$$\gamma = \frac{\mathbf{ca - cn}}{\mathbf{dn - da}}$$

astfel că dependența dintre costul **c** şi durata **d** va fi dată de relația:

$$\mathbf{c = cn + \gamma \cdot (dn - d)} \qquad \text{unde} \qquad \mathbf{da \le d \le dn}$$

Dacă pentru fiecare activitate din proiect a fost fixată o durată între limitele sus menționate, se poate calcula un **cost total al execuției proiectului**, ca sumă a costurilor individuale ale activităților, corespunzătoare duratelor stabilite.

Cunoscând aceste elemente, se pot formula următoarele probleme de optimizare înrudite:

I) Să se determine duratele activităților astfel încât să se realizeze o durată prestabilită a proiectului la cel mai mic cost;
II) Să se determine duratele activităților astfel încât să se minimizeze durata proiectului cu condiția încadrării costului total într-un buget prestabilit.

Există proceduri algoritmice eficiente pentru rezolvarea acestor probleme dar al căror fundament teoretic depăşeşte totuşi limitele impuse lucrării. Ne putem face o idee asupra modului de abordare examinând următoarele exemple simple.

12.1.2 Durată prestabilită la un cost minim

Exemplul 12.1 Se consideră proiectul dat prin lista de activități din tabelul 12.1

Activitate	Activități direct precedente	Durata (săpt.)	Cost (mii lei)
A	–	6	1000
B	–	8	800
C	A , B	4	1000
D	C	12	1200
E	C	16	3000
F	B	8	900
G	D , E	7	1000
H	E , F	8	900
		Total	9800

Tabelul 12.1

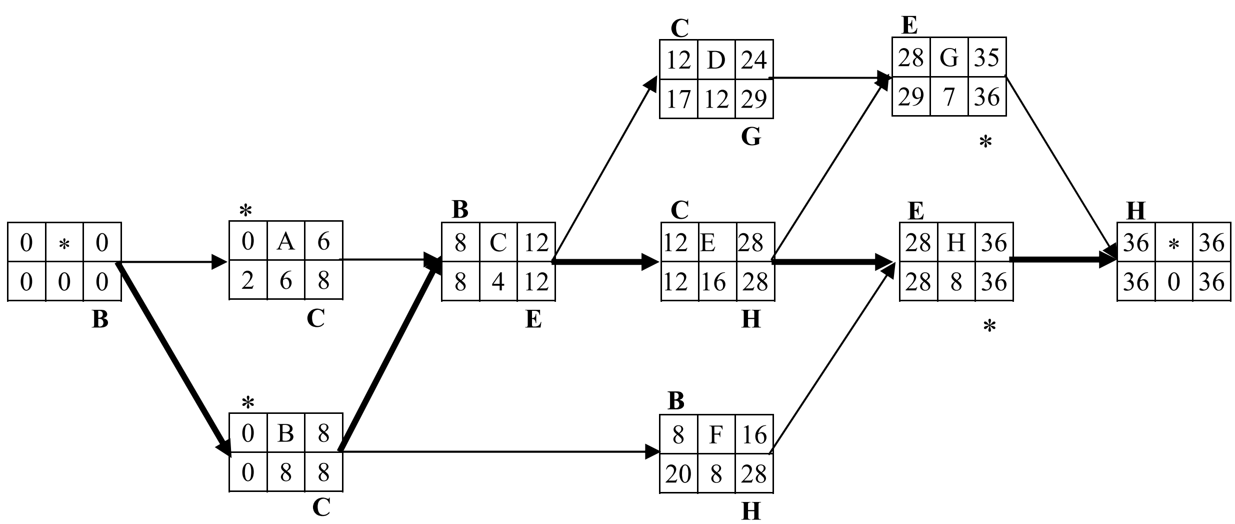


Figura 12.2.1

Pentru analiză s-a ales reprezentarea AoN – vezi figura 12.2.1 unde, pe lângă cei doi paşi, s-a aplicat şi procedura de etichetare (subsecțiunea 11.1.2) necesară identificării secvențelor maximale asociate activităților din proiect

Durata de execuție a proiectului ar fi de 36 săptămâni la un cost de 9800 mii lei. Drumul critic are în compunere activitățile B , C , E şi H.

Beneficiarul lucrării crede că durata rezultată din calcule este cam mare şi a cerut managerului de proiect să studieze posibilitățile de scurtare a acesteia cu 5 săptămâni.
Considerând duratele inițiale drept durate **normale**, pentru fiecare activitate s-a analizat posibilitatea accelerării execuției şi s-au evaluat costurile suplimentare corespunzătoare (tabelul 12.2) Astfel, durata activității D poate fi redusă cu cel mult două săptămâni la un cost de 100 mii lei pe săptămâna de reducere. Pentru activitatea F nu s-au găsit posibilități de accelerare.

Activitate	Durata normală (săptămâni)	Durata accelerată (săptămâni)	Cost unitar de accelerare (mii lei/ săptămână)
A	6	5	175
B	8	6	125
C	4	3	300
D	12	10	100
E	16	15	200
F	8	8	–
G	7	6	150
H	8	6	100

Tabelul 12.2

În contextul descris, se pune problema determinării duratelor activităților astfel încât lucrarea să fie gata în 36 − 5 = 31 de săptămâni la cel mai mic cost (**problema de optimizare I**). Având ca punct de referință rezultatele planificării inițiale, chestiunea este echivalentă cu a stabili ce activități urmează a fi accelerate şi cu cât pentru ca:

- durata normală a proiectului să se reducă cu 5 săptămâni;
- costul total al accelerărilor să fie minim.

În principiu, reducerile de durată se vor opera pe drumul critic dar în limite rezultate din compararea acestuia cu celelalte secvențe maximale din rețeaua coordonatoare. Prioritare la reducere sunt activitățile cu cele mai mici costuri de accelerare.

În tabelul 12.3.1 au fost afişate secvențele maximale asociate proiectului dat. Generarea lor s-a realizat cu ajutorul etichetelor din rețeaua coordonatoare (figura 12.2.1)

Activitatea	Secvența maximală asociată	Durata secvenței	Rezerva totală
B , C , E , H	$* \to B \to C \to E \to H \to *$	36	0
G	$* \to B \to C \to E \to G \to *$	35	1
A	$* \to A \to C \to E \to H \to *$	34	2
D	$* \to B \to C \to D \to G \to *$	31	5
F	$* \to B \to F \to H \to *$	24	12

Tabelul 12.3.1

Listăm activitățile proiectului în ordinea crescătoare a costurilor de accelerare (tabelul 12.4)

Activitatea	D	H	B	G	A	E	C
Cost de accelerare	100	100	125	150	175	200	300
Nr. maxim de săptămâni de reducere	2	2	2	1	1	1	1

Tabelul 12.4

Etapa 1 Pe drumul critic $* \to B \to C \to E \to H \to *$ activitatea cu costul de accelerare cel mai mic este H. Reducând durata lui H cu 2 săptămâni cât este permis, costul lucrării ar creşte cu $100 \times 2 = 200$ mii lei dar durata proiectului ar scade cu numai o săptămână din cauza secvenței $* \to B \to C \to E \to G \to *$ a cărei durată se menține. În consecință reducem durata lui H cu numai o săptămână, costul lucrării mărindu-se cu 100 mii lei Duratele actualizate ale secvențelor maximale sunt date în tabelul 12.3.2

Activitatea	Secvența maximală asociată	Durata secvenței	Rezerva totală
B , C , E , H	$* \to B \to C \to E \to H \to *$	35	0
B , C , E , G	$* \to B \to C \to E \to G \to *$	35	0
A	$* \to A \to C \to E \to H \to *$	33	2
D	$* \to B \to C \to D \to G \to *$	31	4
F	$* \to B \to F \to H \to *$	23	12

Tabelul 12.3.2

Etapa 2 Remarcăm faptul că activitățile B , C şi E au câte două secvențe maximale asociate. În rețea vor exista două drumuri critice $* \to B \to C \to E \to H \to *$ şi $* \to B \to C \to E \to G \to *$ ale căror durate (egale) vor trebui reduse simultan. Există mai multe variante de reducere dar cea mai bună – sub aspectul efectului şi costului – constă în accelerarea execuției activității B cu două săptămâni. Durata proiectului scade la 33 de săptămâni iar costul suplimentar ajunge la valoarea $100 + 125 \times 2 = 350$ mii lei.Actualizăm şi duratele secvențelor maximale (tabelul12.3.3)

Activitatea	Secvența maximală asociată	Durata secvenței	Rezerva totală
B , C , E , H	∗ → B → C → E → H→ ∗	33	0
B , C , E , G	∗ → B → C → E → G → ∗	33	0
A , C , E , H	∗ → A → C → E → H→ ∗	33	0
D	∗ → B → C → D → G → ∗	29	4
F	∗ → B → F → H→ ∗	21	12

Tabelul 12.3.3

Etapa 3 Ca urmare a „scurtărilor” efectuate, activitățile C şi E au trei secvențe maximale asociate iar B şi H câte două. Este posibil să existe secvențe de activități succesive, nesemnalate până acum şi care, datorită rducerilor operate, devin secvențe maximale şi numai recalcularea termenelor şi actualizarea etichetelor pot lămuri situația (figura 12.2.2)

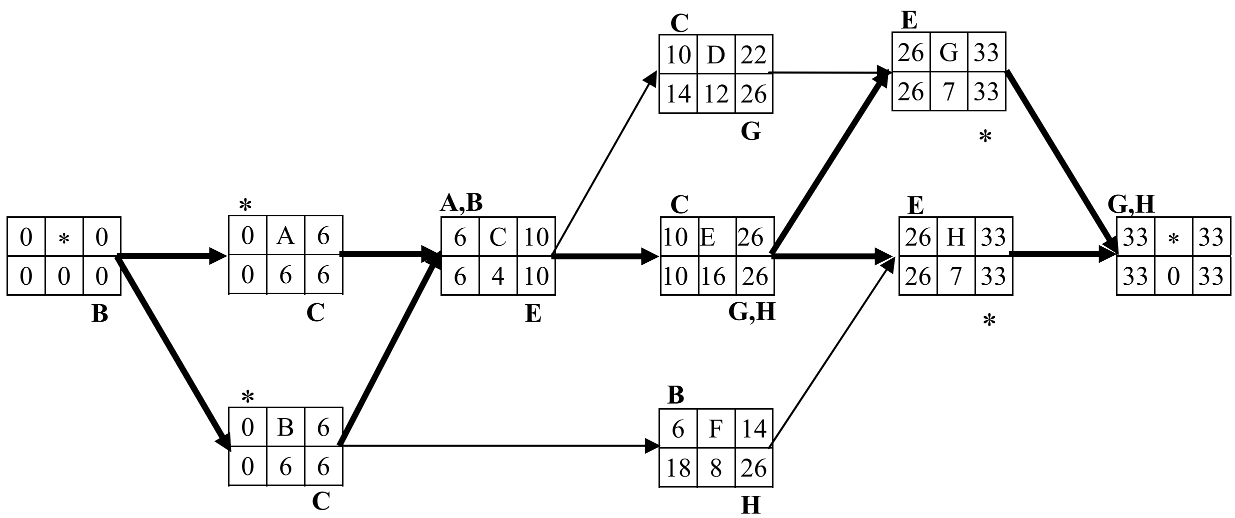


Figura 12.2.2

Durata proiectului a scăzut la 33 de săptămâni, aşa cum deja ştiam dar au apărut şi noi secvențe maximale, evidențiate în tabelul 12.3.4

Activitatea	Secvența maximală asociată	Durata secvenței	Rezerva totală
B , C , E , H	∗ → B → C → E → H → ∗	33	0
B , C , E , G	∗ → B → C → E → G → ∗	33	0
A , C , E , H	∗ → A → C → E → H → ∗	33	0
A , C , E , G	**∗ → A → C → E → G → ∗**	**33**	**0**
D	∗ → B → C → D → G → ∗	29	4
	∗ → A → C → D → G → ∗	**29**	**4**
F	∗ → B → F → H→ ∗	21	12

Tabelul 12.3.4

O examinare atentă a datelor din tabelul 12.3.4 arată că durata cerută de 31 de săptămâni poate fi realizată reducând duratele activităţilor H , G şi E cu câte o săptămână.Costul suplimentar ar ajunge la valoarea de 350 + 100 + 150 + 200 = 800 mii lei, ceeace reprezintă 8,16% din costul iniţial.
Recapitulând, reducerea duratei lucrării de la 36 la 31 de săptămâni, adică cu 13,9%, măreşte costul total cu 8,16% care ajunge la 9800 + 800 = 10600 mii lei.
Reţeaua actualizată este dată în figura 12.2.3; cu excepţia activităţilor D şi F toate celelalte devin activităţi critice.

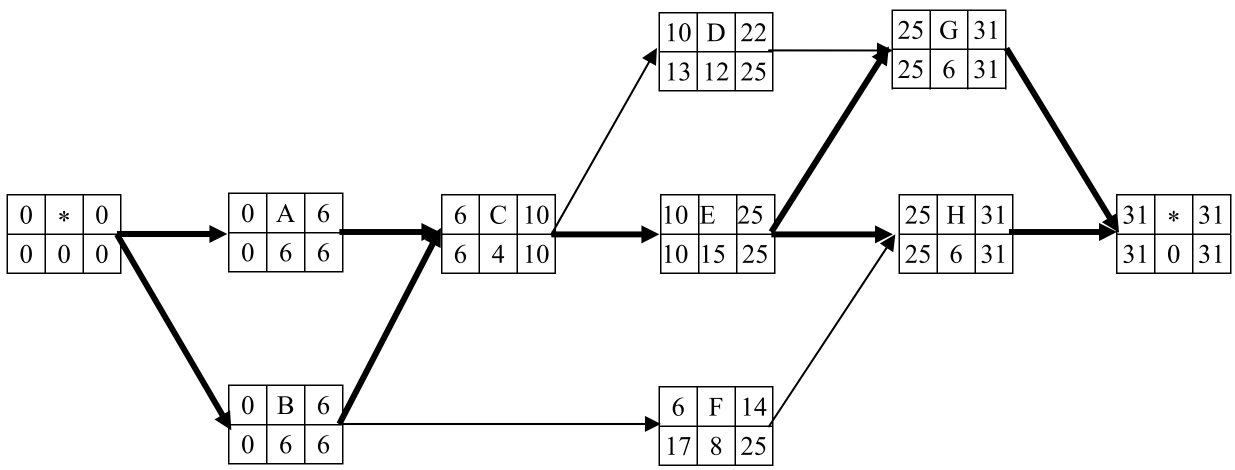


Figura 12.2.3

12.1.3 Durată minimă în limita unui buget prestabilit

Exemplul 12.2 Considerăm proiectul cu datele din tabelul 12.5

Activitatea	Act. direct prec	**dn** (luni)	**da** (luni)	**dn – da**	**cn** (mii lei)	**ca** (mii lei)	γ (mii lei/lună)
A	–	1	1	0	200	200	0
B	–	5	3	2	1000	1200	100
C	A	2	1	1	600	750	150
D	A	9	7	2	3000	3400	200
E	B , C	8	4	4	4500	5400	225
F	B , C	3	2	1	800	925	125
				Total	10100	11875	

Tabelul 12.5

Se doreşte realizarea proiectului în cel mai scurt timp dar cu un buget de cheltuieli care să nu depăşească 11000 mii lei (**problema de optimizare II**).

Vom determina mai întâi cea mai scurtă durată posibilă de execuție a proiectului; ea se obține luând în considerare duratele accelerate **da** ale activităților componente. Rețeaua AoN cu duratele accelerate şi calculele aferente sunt date în figura 12.3.1 de unde rezultă că lucrarea nu poate fi terminată în mai puțin de 8 luni, drumul critic fiind format din activitățile A şi D. Costul executării accelerate a tuturor activităților însumează 11875 mii lei. Totuşi, lucrarea poate fi realizată în 8 luni cu un buget mai mic! Putem face acest lucru mărind duratele unor activități necritice de aşa manieră încât duratele secvențelor maximale asociate să nu depăşească durata drumului critic de 8 luni. De această dată au prioritate activitățile cu costul unitar de accelerare mare. În tabelul 12.6.1 sunt listate secvențele maximale asociate activităților proiectului.

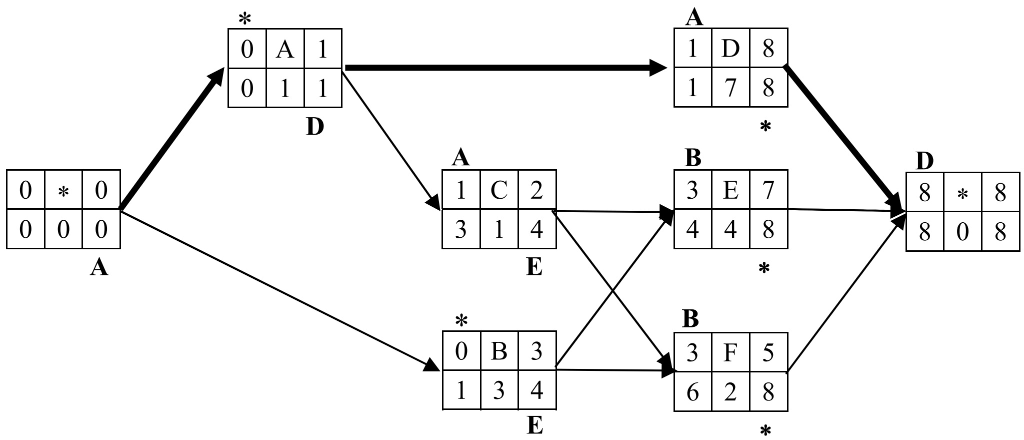


Figura 12.3.1

Activitatea	Secvența maximală asociată	Durata secvenței	Rezerva totală
A , D	$* \to A \to D \to *$	8	0
B , E	$* \to B \to E \to *$	7	1
C	$* \to A \to C \to E \to *$	6	2
F	$* \to B \to F \to *$	5	3

Tabelul 12.6.1

Etapa 1 Determinăm bugetul cel mai mic cu care întreaga lucrare poate fi realizată în 8 luni. Din tabelul 12.6.1 rezultă că există numai două variante de reducere a bugetului actual de 11875 mii lei:

- să se mărească duratele activităților E, C şi F cu o lună; costul proiectului ar scade cu 225 + 150 + 125 = 500 mii lei.

- să se mărească duratele activităților C, F şi B cu o lună; costul proiectului ar scade cu 150 + 125 + 100 = 375 mii lei.

Cum este şi firesc adoptăm prima variantă. Refacem calculul termenelor în reţeaua coordonatoare (figura 12.3.2) după care actualizăm duratele secvenţelor maximale (tabelul 12.6.2 în care sublinierile indică activităţile a căror durată nu mai poate fi mărită!). Bugetul minim cu care proiectul poate fi terminat în 8 luni este de 11875 – 500 = 11375 mii lei.

Etapa 2 Noul buget este însă superior limitei maxime impuse; va trebui să acceptăm ideea că durata proiectului trebuie mărită! Drept care, determinăm cel mai mic buget cu care lucrarea s-ar termina în 8 + 1 = 9 luni.

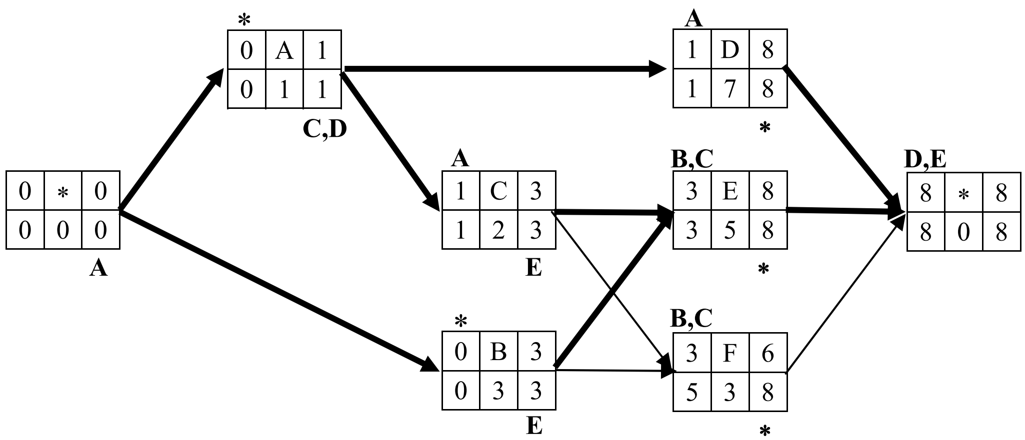


Figura 12.3.2

Activitatea	Secvenţa maximală asociată		Rezerva totală
A , D	$* \to \underline{A} \to D \to *$	8	0
B , E	$* \to B \to E \to *$	8	0
A , C , E	$* \to \underline{A} \to \underline{C} \to E \to *$	8	0
F	$* \to B \to \underline{F} \to *$	6	2
	$* \to \underline{A} \to \underline{C} \to \underline{F} \to *$	6	

Tabelul 12.6.2

Exceptând F, toate activităţile proiectului sunt critice iar E este activitatea a cărei „relaxare” ar aduce cea mai mare reducere a costului total.

Prelungind E cu o lună, duratele secvenţelor $* \to B \to E \to *$ şi $* \to \underline{A} \to \underline{C} \to E \to *$ ca şi durata întregului proiect cresc la 9 luni. Din tabelul 12.6.2 rezultă că singura posibilitate de a mai reduce cheltuielile în limitele celor 9 luni este să mărim durata activităţii D cu o lună. Prin aceste operaţii costul total scade cu 225 + 200 = 425 mii lei ajungând la valoarea de 11375 – 425 = 10950 mii lei.

În concluzie, bugetul impus de 11000 mii lei permite realizarea proiectului în 9 luni şi orice reducere a sa sub 10950 mii lei implică prelungirea execuţiei.

12.2 Alocarea resurselor

Executarea activităților unui proiect implică utilizarea unor mijloace cum ar fi **forța de muncă** – cu diferite calificări – şi **utilajele specializate,** denumite generic **resurse**. În general, aceste resurse sunt disponibile, la un moment sau altul, în cantități **limitate** astfel că planificarea activităților trebuie să țină seama nu numai de condiționările dintre ele şi de duratele lor dar şi de necesitatea încadrării necesarului de resurse în disponibilități pe tot parcursul derulării proiectului. Aceasta este în esență **problema alocării resurselor**.

12.2.1 Preliminarii

Planificarea activităților unui proiect în condițiile utilizării unor resurse limitate este o problemă complexă şi ca urmare vom adopta următoarele ipoteze simplificatoare:

- Disponibilul oricărei resurse este **constant** pe tot parcursul execuției proiectului (în vederea ridicării unui imobil, constructorul are la dispoziție 6 fierari- betonişti, 10 zidari, 8 tâmplari, 15 muncitori necalificați, un escavator...)
- Necesarul dintr-o resursă în vederea executării unei activități este **constant** pe toată durata activității (în proiectul ridicării unui imobil, activitatea „cofraje şi armături” cu durata de 3 zile are nevoie – în fiecare zi – de 6 fierari betonişti, 4 tâmplari şi 8 muncitori necalificați).

În continuare folosim notațiile:

H ≡ mulțimea resurselor considerate;

$b_h \equiv$ disponibilul din resursa $h \in H$ asigurat şi constant pe toată durata de realizare a proiectului;

$r_{ih} \equiv$ necesarul din resursa $h \in H$ pentru activitatea *i* presupus constant pe toată durata executării activității.

În mod firesc vom presupune că $r_{ih} \leq b_h$ pentru orice resursă *h* şi orice activitate *i*.

Exemplul 12.3 În tabelul 12.7 este dată lista de activități a unui proiect de reorganizare a unui flux tehnologic.

Activitatea	Activități direct precedente	Durata (zile)	Necesar resurse	
			R_1	R_2
A	–	1	2	2
B	–	3	2	3
C	B	5	1	3
D	A	4	1	2
E	A	5	1	1
F	C , D , E	3	2	3
G	C	1	1	2

Tabelul 12.7

La realizarea proiectului se utilizează două categorii de forță de muncă R_1 şi R_2. De exemplu, pentru executarea activității F sunt necesari – în fiecare din cele trei zile ale duratei sale – 2 muncitori R_1 şi 3 muncitori R_2. Zilnic sunt disponibili 3 muncitori R_1 şi 5 muncitori R_2.

În acest caz, alocarea resurselor înseamnă stabilirea duratei minime de execuție a proiectului şi planificarea în timp a activităților astfel încât:

- să fie respectate duratele activităților şi precedențele dintre ele;
- necesarul de resurse să se încadreze în disponibilele limitate date.

Elaborăm o primă planificare a lucrării fără a ține seama de resurse; este posibil ca rezultatul să satisfacă şi condiția încadrării necesarului de resurse în disponibile. Rețeaua coordonatoare AoA este dată în figura 12.4

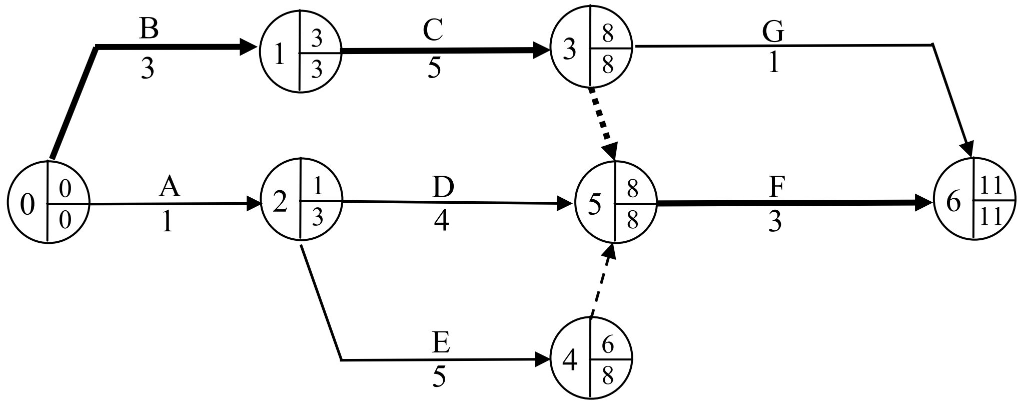


Figura 12.4

Dacă am avea resurse suficiente întreaga lucrare s-ar termina în 11 zile. Disponibilele $b_1 = 3$ şi $b_2 = 5$ permit acest lucru?
Pentru răspuns, vom trasa profilul necesarului din fiecare resursă şi îl vom compara cu profilul disponibilului din resura respectivă, considerând că toate activitățile încep la termenul timpuriu rezultat din analiza rețelei coordonatoare – vezi figurile 12.5.1 şi 12.5.2
Termenele timpurii de începere EST sunt date în tabelul 12.8

Activitatea	A	B	C	D	E	F	G
EST	0	0	3	1	1	8	8

Tabelul 12.8

Se constată că disponibilul resursei R_1 este depăşit în primele trei zile(figura 12.5.1); disponibilul din R_2 este depăşit din ziua 2 până în ziua 5 (figura 12.5.2).
În concluzie, cu resursele existente proiectul nu poate fi terminat în 11 zile!

În continuare, o depăşire a disponibilului dintr-o resursă sau alta se va numi **conflict de resurse**. În exemplul de faţă avem un conflict de resurse în primele cinci zile de la începerea – simulată! – a execuţiei proiectului.

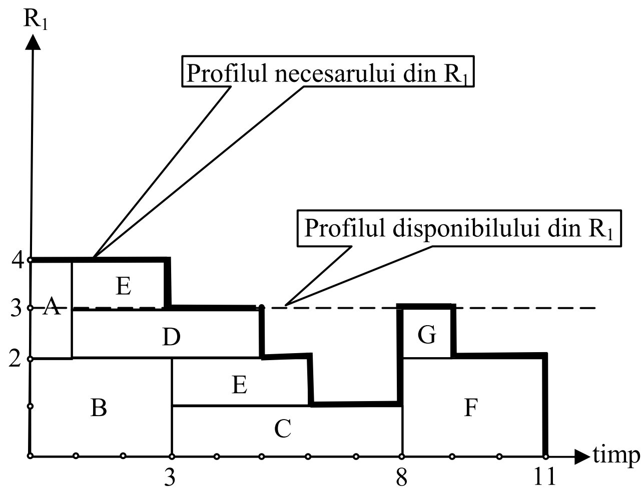


Figura 12.5.1

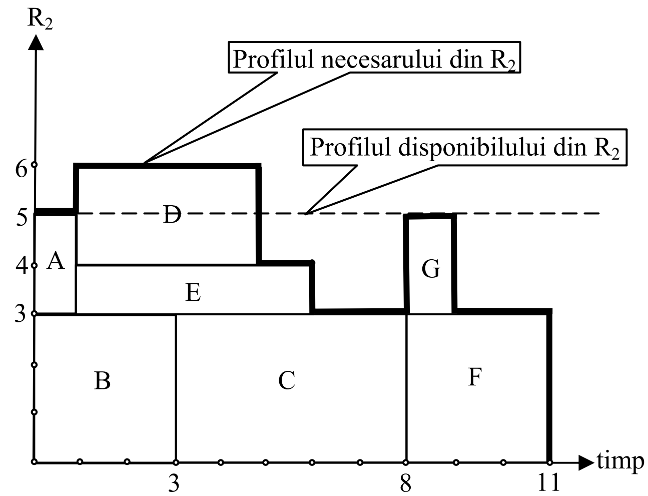


Figura 12.5.2

12.2.2 Rezolvarea unui conflict de resurse

În cazul în care, la un moment dat, apare o depăşire a necesarului faţă de disponibil la una sau mai multe resurse, singura cale de rezolvare a conflictului constă în **amânarea** unei activităţi sau a mai multora care pot începe la momentul respectiv.
Operaţia de amânare este delicată din mai multe motive:

- amânarea unor activităţi poate antrena amânarea altor activităţi care depind direct sau indirect de primele;
- rezolvarea unui conflict de resurse la un anumit moment poate modifica conflictele ulterioare în sensul acutizării sau diminuării lor sau poate determina apariţia altora noi!

Pentru a găsi soluţia corectă ar trebui examinate toate posibilităţile de amânare care pot rezolva un conflict de resurse dat. Conform celor spuse mai înainte, fiecare modalitate de amânare are propriile ei conflicte ulterioare şi rezolvarea fiecăruia dintre ele generează noi alternative de amânare care trebuie studiate. Astfel, căutarea soluţiei optime a problemei alocării devine un proces „stufos" şi greu de controlat chiar şi pentru proiecte de mici dimensiuni. În această situaţie, ne vom mulţumi cu determinarea unei soluţii, nu neapărat optime, dar care:

- este (subiectiv vorbind) **satisfăcătoare, acceptabilă**;
- se obţine **relativ uşor** şi în timp **util.**

Un procedeu care conduce la o asemenea soluţie se numeşte euristică. În esenţă, o **euristică** pentru rezolvarea unei probleme de optimizare (P) este un **procedeu iterativ** care, în căutarea unei soluţii a problemei (P), încearcă să facă, la fiecare pas, **cea mai bună alegere**. În general, **optimizarea locală** nu conduce decât în anumite cazuri către soluţia optimă, astfel că rezultatul aplicării unei euristici este de regulă o soluţie **suboptimală,** destul de apropiată de soluţia optimă căutată.

12.2.3 O euristică de alocare a resurselor

Caracteristic euristicilor de alocare a resurselor este faptul că, în rezolvarea unui conflict de resurse nu se examinează toate alternativele de amânare ci **numai una** dintre ele, construită pe baza unui **criteriu de prioritate la amânare** cum ar fi:

- se amână cu prioritate activitatea cu cea mai mare **rezervă actualizată** sau activitatea cu durata cea mai mică (rezerva actualizată – la un anumit moment - a unei activităţi este diferenţa dintre rezerva totală şi numărul unităţilor de timp cu care activitatea a fost amânată în momentele anterioare);
- activităţile amânate se aleg în aşa fel încât cele rămase să asigure o utilizare cât mai bună a resurselor.

În practică, aceste criterii se utilizează fie separat fie în combinaţie.
Pentru descrierea schemei generale a euristicilor de alocare a resurselor introducem următoarele notaţii şi termeni:

- fiecare activitate va avea ataşat un **termen potenţial de începere**(abreviat TPI) care se poate modifica pe parcurs. La start, TPI se iniţializează cu termenul timpuriu de începere EST al activităţii.
- pe parcursul derulării algoritmului, activităţile proiectului se împart în:
  activităţi **programate** (cu resursele necesare asigurate);
  activităţi (incă) **neprogramate.**

În momentul în care o activitate este declarată programată, termenul ei potenţial de începere devine **termen definitiv de începere** şi nu va mai putea fi modificat în etapele ulterioare ale algoritmului.
La start, toate activităţile proiectului sunt neprogramate.

- programarea activităţilor, cu luarea în considerare şi a asigurării resurselor necesare, se face la anumite momente de timp. **Momentul curent**, notat **t,** este **minimul** termenelor potenţiale de începere ale activităţilor (încă) neprogramate. La start **t** = 0.
- în raport cu momentul curent de programare **t** activităţile programate pot fi
  - **terminate** ≡ termenul definitiv de terminare ≤ **t**;

  sau
  - **în curs de desfăşurare** ≡ termenul definitiv de terminare > **t.**

Printre activităţile (încă) neprogramate vom distinge activităţile **candidate** la programare: este vorba de activităţile al căror termen potenţial de începere este egal cu **t**.
Vom nota cu $\mathcal{A}$ mulţimea de activităţi în curs de desfăşurare sau candidate la programare la momentul **t**

- la fiecare moment de programare **t** vom compara disponibilul de resurse cu necesarul pentru susţinerea activităţilor din $\mathcal{A}$. Diferenţa:

$$\Delta_h = b_h - \sum_{i \in \mathcal{A}} r_{ih}$$

se numeşte **indicator de amânare**.Dacă $\Delta_h \geq 0\,,(\forall)h \in H$ există suficiente resurse pentru susținerea simultană a tuturor activităților din $\mathcal{A}$. În caz contrar unele activități din $\mathcal{A}$, evident dintre cele candidate, vor fi amânate. Modul în care se aleg activitățile ce vor fi amânate – a căror mulțime se va nota cu $\mathcal{D}$ - depinde de criteriul de prioritate la amânare adoptat. În ceeace priveşte noul termen potențial de începere al activităților amânate, acesta se va fixa cel mai devreme cu putință dar, în aşa fel, încât să nu afecteze „susținerea cu resurse" a activităților programate!
Cu aceste pregătiri se poate trece la prezentarea schemei generale a euristicilor de alocare a resurselor.

START

- trasăm rețeaua coordonatoare (AoA sau AoN după dorință) şi calculăm termenele timpurii de începere ale activităților luând în considerare numai duratele şi condiționările dintre activități..
- trasăm profilul necesarului din fiecare resursă considerând că toate activitățile încep la termenele timpurii.
- dacă pentru fiecare resursă profilul necesarului nu depăşeşte profilul disponibilului **STOP**: prin programarea făcută sunt asigurate şi resursele necesare susținerii tuturor activităților din proiect. În caz contrar:
- pentru fiecare activitate inițializăm:

Termenul potențial de începere TPI = EST ≡ termenul timpuriu de începere, calculat mai înainte

- toate activitățile proiectului se declară neprogramate
- se fixează criteriul de prioritate care va fi folosit în rezolvarea conflictelor de resurse.

Notă: în principiu, se pot utiliza mai multe criterii de prioritate, fie separat fie în combinație, în final alegându-se cea mai „bună" cale de urmat...

Conținutul unei iterații

Pasul 1 Dacă toate activitățile proiectului au fost declarate programate **STOP**. În caz contrar:

Se determină:

- momentul curent de programare **t** = minimul termenelor potențiale de începere ale activităților neprogramate.
- se formează mulțimea $\mathcal{A}$ compusă din:
    - activitățile în curs de desfăşurare la momentul **t**;
    - activitățile candidate la programare la momentul **t**.

- se calculează indicatorii de amânare:

$$\Delta_h = b_h - \sum_{i \in \mathcal{A}} r_{ih}\ , h \in H$$

Pasul 2 Dacă $\Delta_h \geq 0\,, h \in H$ se pune $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $\mathcal{D} = \varnothing$ şi se trece la pasul 4. Dacă pentru cel puțin o resursă avem $\Delta_h < 0$ se trece la pasul 3.

Pasul 3. Se formează mulțimea $\mathcal{D}$, compusă din activitățile candidate din $\mathcal{A}$ ce urmează a fi amânate pe baza criteriilor de prioritate la amânare avute în vedere. Se pune $\mathcal{A}' = \mathcal{A} - \mathcal{D}$.

Notă: **Este de dorit ca $\mathcal{D}$ să fie cât mai „mică” deoarece activitățile candidate din $\mathcal{A}$ şi neincluse în $\mathcal{D}$ vor putea fi programate!**

Pasul 4 Se programează activitățile **candidate** din $\mathcal{A}'$ - în caz că sunt - să înceapă, **definitiv,** la momentul **t.** Aceste activități se declară **programate.**

Dacă $\mathcal{D} = \varnothing$ se revine la pasul 1. Dacă $\mathcal{D} \neq \varnothing$ se trece la pasul 5

Pasul 5 Tuturor activităților din $\mathcal{D}$ li se fixează un nou TPI egal cu **minimul termenelor definitive de terminare ale activităților din $\mathcal{A}'$. Dacă este cazul se vor modifica şi TPI ale activităților care depind direct sau indirect de activitățile amânate!**
Se revine la pasul 1 în cadrul unei noi iterații.

Exemplul 12.4 Euristica descrisă va fi aplicată proiectului din exemplul 12.3. În operațiile de amânare se va folosi criteriul rezervei actualizate combinat cu criteriul utilizării eficiente a resurselor.

Reamintim că rezerva actualizată a unei activități candidate la programare la momentul **t** este rezerva totală inițială diminuată cu numărul unităților de timp cu care activitatea a fost amânată la momentele de programare anterioare lui **t.** Obținem imediat formula:

$$R^{act} = \text{LFT} - \mathbf{t} - \text{durata activității} = \text{LST} - \mathbf{t}$$

unde LST şi LFT sunt termenele târzii de începere, respectiv de terminare ale activității în cauză. Atenție: **o rezervă actualizată negativă indică depăşirea duratei de execuție a proiectului stabilită inițial, fără a ține seama de resurse!**

Rezultatele aplicării procedurii au fost înscrise progresiv în tabelul 12.9

Start Etapele premergătoare au fost parcurse în exemplul 12.3 de unde a rezultat necesitatea aplicării euristicii de alocare a resurselor!
Termenele timpurii de începere ale activităților au fost înscrise în coloana „start” a tabelului 12.9 ca termene potențiale de începere.

Iterația 1

Pasul 1 **t** = 0

$\mathcal{A} = \{A , B\}$

$\Delta_1 = 3-(2+2) < 0 \qquad \Delta_2 = 5-(2+3) = 0$

Pasul 2 Resursa R_1 nu este suficientă pentru susținerea simultană a activităților A şi B.

Pasul 3 Se observă uşor că pentru rezolvarea conflictului de resurse apărut la momentul 0 este suficientă amânarea uneia dintre activitățile A , B.Conform celor convenite din start, are prioritate activitatea cu rezerva mai mare:

$$R(A) = 3 - 0 - 1 = 2 \qquad R(B) = 3 - 0 - 3 = 0 \quad \rightarrow \text{se amână A.}$$

În notațiile generale: $\mathcal{D} = \{A\}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \{B\}$

Pasul 4 Se programează B să înceapă, definitiv, la momentul 0. Trecem acest termen în coloana „termene definitive de începere” a tabelului 12.9 după care notăm şi termenul definitiv de terminare. În coloana „Iterația 1” trecem un $*$ în dreptul activității B, semn că aceasta a fost declarată programată.

Pasul 5 Pentru activitatea amânată A fixăm un nou TPI egal cu termenul definitiv de terminare al activității programate B: TPI(A) = 3, Trecem acest termen în coloana „Iterația 1”
Rețeaua coordonatoare (figura 12.4) arată că activitățile D şi E nu pot începe acum mai devreme de temenul 3 + 1 = 4. Completăm coloana „Iterația 1” cu TPI(D) = 4 , TPI(E) = 4.
Amânarea activității E implică şi amânarea începerii activității F la termenul TPI(F) = 4 + 5 = 9.
Activitățile C şi G îşi mențin TPI, nefiind condiționate de activitățile amânate.
Coloana „Iterația 1” este acum completă. Se poate trece la:

Iterația 2

Pasul 1 **t** = 3

$\mathcal{A} = \{A , C\}$

$\Delta_1 = 3 - (2 + 1) = 0 \qquad \Delta_2 = 5 - (2 + 3) = 0$

Pasul 2 Resursele sunt suficiente pentru susținerea simultană a activităților A şi C

Pasul 4 Se programează A şi C să înceapă, definitiv, la momentul 3. Celelalte activități îşi mențin termenele potențiale de începere curente. (vezi coloana „Iterația 2” din tabelul 12.9!)

Iterația 3

t = 4

$$\mathcal{A} = \{\underbrace{D , E}_{\text{Activități neprogramate, candidate}} ; \overset{\text{Activitate în curs de desfăşurare}}{C}\}$$

$\Delta_1 = 3 - (1 + 1 + 1) = 0 \qquad \Delta_2 = 5 - (2 + 1 + 3) < 0$

Va trebui să amânăm una dintre activitățile candidate D sau E.

- după criteriul rezervei, actualizate la momentul **t** = 4:

$R^{act}(D) = 8 - 4 - 4 = 0 \qquad R^{act}(E) = 8 - 4 - 5 = -1 \qquad \rightarrow$ ar trebui amânată D.

- după criteriul utilizării eficiente a resurselor ar trebui să amânăm activitatea E, deoarece, în acest fel s-ar asigura utilizarea integrală a resursei R_2.

Deoarece urmărim să terminăm proiectul cât mai repede preferăm să amânăm activitatea D (deşi, nu ştim dacă aceasta este alternativa corectă!!)

Deci:

$$\mathcal{D} = \{D\} \ , \ \mathcal{A}' = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \{E , C\}$$

Programăm E să înceapă la momentul 4. Pentru D fixăm un nou TPI egal cu minimul termenelor (definitive) de terminare ale activităților programate E şi C: TPI(D) = min {8,9} = 8
În mod necesar, F se amână la termenul 8 + 4 = 12.

Iterația 4

t = 8

Activitate în curs de desfăşurare

$\mathcal{A} = \{\underbrace{D, G}; E\}$

Activități neprogramate, candidate

$$\Delta_1 = 3 - (1 + 1 + 1) = 0 \qquad \Delta_2 = 5 - (2 + 2 + 1) = 0$$

Declarăm D şi G activități programate cu termenul definitiv de începere 8.

Iterația 5
Activitatea F se programează să înceapă la momentul **t** = 12.

Activitatea	Durata	Termen definitiv de începere	Termen definitiv de terminare	Termene potențiale de începere					
				Start	Iterația 1	Iterația 2	Iterația 3	Iterația 4	Iterația 5
A	1	3	4	0	3	*	*	*	*
B	3	0	3	0	*	*	*	*	*
C	5	3	8	3	3	*	*	*	*
D	4	8	12	1	4	4	8	*	*
E	5	4	9	1	4	4	*	*	*
F	3	12	15	8	9	9	12	12	*
G	1	8	9	8	8	8	8	*	*

Tabelul 12.9

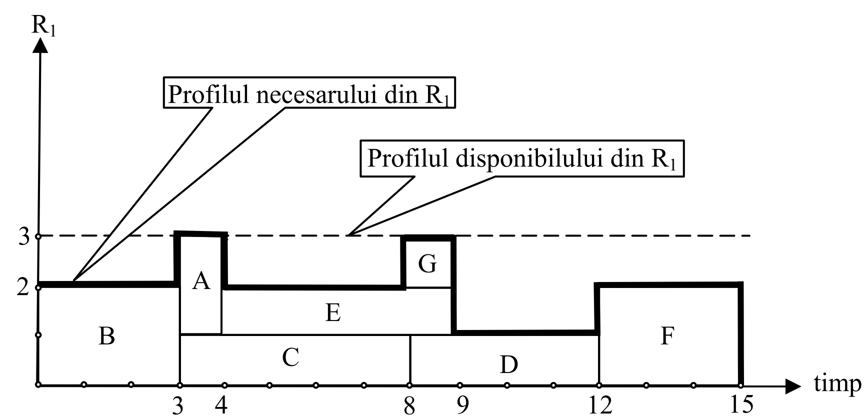


Figura 12.6.1

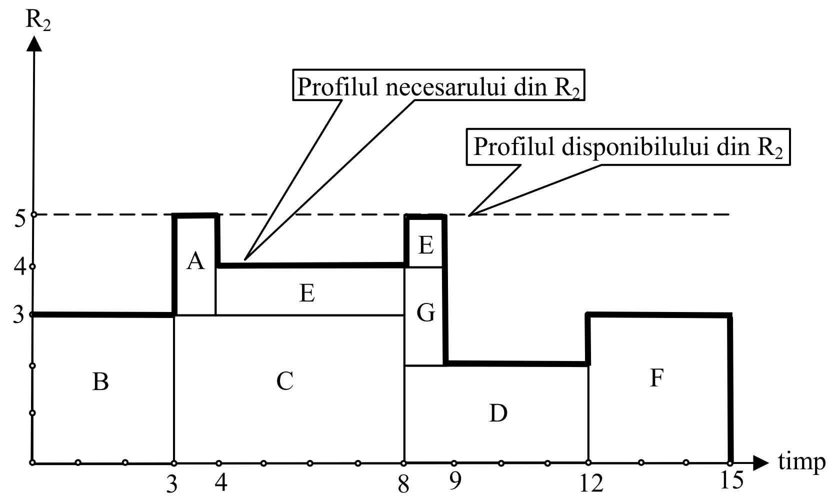


Figura 12.6.2

Concluzii: Euristica descrisă a condus la o programare a activităților proiectului pe o durată de 15 zile cu patru mai mult decât durata minimă stabilită fără a ține seama de resurse. Figurile 12.6.1 şi 12.6.2 arată clar încadrarea necesarului de resurse în disponibilele date.

Recomandăm cititorului interesat să analizeze cum ar fi continuat programarea dacă la iterația 3 se amâna activitatea E în locul activității D.

Probleme propuse

1. Fiecărei activități din proiectul dat în tabelul 12.10 îi sunt asociate:

- o durată „normală” de execuție **dn**;
- o durată de execuție „accelerată” **da**;
- un cost suplimentar al accelerării execuției γ.

Codul activității	Activități direct precedente	Durata normală **dn** (săptămâni)	Durata accelerată **da** (săptămâni)	**dn – da**	Cost unitar de accelerare γ (mii lei/săptămână)
A	–	4	3	1	125
B	A	5	4	1	200
C	A	4	2	2	150
D	B	3	2	1	225
E	C	3	2	1	100
F	B , E	4	2	2	175

Tabelul 12.10

i) Să se traseze rețeaua AoA;

ii) Să se determine durata proiectului şi activităţile critice luând în considerare duratele normale (la efectuarea paşilor înainte şi înapoi este bine să aplicaţi şi procedura de etichetare pentru a fi pregătiţi să răspundeţi la următoarea întrebare);

iii) Ce activităţi ar trebui accelerate şi cu cât pentru ca proiectul să se termine în 11 săptămâni iar costul suplimentar să fie minim.

2. Se consideră proiectul dat prin lista de activităţi din tabelul 12.11. Pentru fiecare activitate sunt date o durată normală de execuţie **dn** şi una accelerată **da** (săptămâni) împreună cu costurile aferente **cn** şi respectiv **ca** (milioane lei).

i) În ipoteza unei dependenţe liniare între costul unei activităţi şi durata de execuţie calculaţi costurile unitare de accelerare **γ** pentru toate activităţile proiectului dat.
ii) Determinaţi durata minimă de execuţie a proiectului luând în considerare duratele normale.
iii) Care ar fi durata cea mai mică de realizare a proiectului cu un buget de până la 300 milioane lei?
iv) Care ar fi bugetul cel mai mic cu care se poate realiza proiectul în mai puţin de 70 de săptămâni?

Activitatea	Act. direct preced.	**dn**	**da**	**cn**	**ca**
A	-	20	11	2	11
B	-	36	33	45	48
C	-	22	12	4	24
D	-	36	12	102	174
E	A	25	15	12	37
F	A	9	7	2	14
G	B	40	30	32	52
H	C	45	25	28	68
K	D , E	26	16	15	45
I	F	50	25	35	60
J	G , K , I	8	6	1	11

Tabelul12.11

3. Pentru realizarea proiectului dat în tabelul 12.12 s-au prevăzut 6 muncitori necalificaţi.În ultima coloană a tabelului este indicat numărul de muncitori necesari zilnic fiecărei activităţi.

Codul activităţii	Activităţi direct precedente	Durata (zile)	Necesar muncă Necalificată (persoane/zi)
A	–	2	1
B	–	3	2
C	–	5	3
D	–	4	2
E	A	2	2
F	E	6	1
G	B	6	1

Tabelul 12.12

i) Trasați rețeaua coordonatoare AoA. Determinați durata minimă de execuție a proiectului luând în considerare numai duratele activităților şi precedențele dintre ele. Desenați profilul necesarului de forță de muncă necalificată corespunzător planificării rezultate.

ii) Aplicați algoritmul de alocare pentru a obține o durată de execuție cât mai mică cu respectarea încadrării necesarului de forță de muncă în disponibilul dat.

4. Să se determine o durată cât mai mică de execuție a proiectului dat prin lista de activități din tabelul 12.13 în cazul în care sunt utilizate două resurse R_1 şi R_2 fără a depăşi disponibilele $b_1 = 6$ şi respectiv $b_2 = 8$.

i) Trasați rețeaua coordonatoare (AoA sau AoN după dorință) şi stabiliți durata minimă de realizare a proiectului fără a ține seama de resurse;
ii) Pentru fiecare resursă desenați profilul necesarului şi comparați-l cu disponibilul;
iii) Aplicați euristica de alocare, luând drept criteriu de prioritate la amânare, criteriul rezervei actualizate (în exclusivitate!);
iv) Reluați aplicarea euristicii de alocare în situația în care, în rezolvarea conflictelor de resurse, se va avea în vedere în primul rând criteriul utilizării cât mai bune a celor două resurse şi numai dacă este cazul se va apela şi la criteriul rezervei actualizate;
v) Comparați rezultatele obținute la iii) şi iv).

Activitatea	Act. direct precedente	Durata (zile)	Necesar resurse	
			R_1	R_2
A	-	2	4	6
B	A	1	2	4
C	A	5	4	2
D	A	3	4	6
E	B	1	2	2
F	B	4	2	2
G	C	8	3	4
H	D	2	2	4
I	E	3	2	4
J	F , G , H	8	2	2
K	I , J	2	2	6

Tabelul 12.13

Unitatea de învățare 13

INTRODUCERE ÎN PROGRAMAREA NELINIARĂ
Neliniar vs. liniar

Cuprins

13.1 Neliniaritatea în modelarea proceselor economice
13.2 Dificultăți cauzate de neliniaritate
13.3 Clase de probleme neliniare de optimizare
13.4 Modelare neliniară prin exemple

Probleme propuse
Bibliografie

13.1 Neliniaritatea în modelarea proceselor economice

Caracteristic unei probleme de programare liniară este faptul că toate funcțiile implicate în ea – funcția obiectiv şi restricții – sunt liniare. Deşi ipotezele de liniaritate au loc în numeroase situații practice tot atât de frecvent ele nu sunt îndeplinite. De fapt, mulți economişti teoreticieni au constatat că un anume grad de neliniaritate este regula şi nu excepția în problemele de planificare economică.

Există deci o puternică motivație economică pentru studiul problemelor de programare neliniară a căror formă canonică de prezentare este:

Să se determine $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$
care minimizează valoarea funcției obiectiv $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
cu satisfacerea restricțiilor $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0 \quad i = 1,2,\ldots,m$
şi a condițiilor de nenegativitate $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$

sau condensat

$$\begin{cases} \min\ f(x) & x \in R^n \\ g_i(x) \le 0 & i = 1,2,...,m \\ \quad x \ge 0 & \end{cases}$$

Dacă în cazul liniar ($\Leftrightarrow$ f si g_i sunt funcții liniare) există (cel puțin) o metodă generală de rezolvare – de exemplu metoda simplex – în cazul neliniar nu există o asemenea metodă. Totuşi progrese substanțiale au fost făcute în unele cazuri speciale prin impunerea unor condiții asupra funcțiilor f si g_i .

Să considerăm problema firmei al cărei obiectiv este determinarea unui program de producție astfel încât:

- necesarul de resurse pentru susținerea programului să se încadreze în disponibile date;
- profitul total, rezultat din vânzarea bunurilor produse să fie maxim.

În multe situații practice, prețurile şi costurile unitare de fabricație pot fi considerate constante astfel că şi profiturile unitare vor fi la fel. În consecință, în aceste cazuri funcția obiectiv, care reprezintă profitul total, va fi liniară:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = P_1 x_1 + P_2 x_2 + ... + P_n x_n$$

(unde x_j reprezintă cantitatea produsă şi vândută din bunul j iar P_j este profitul unitar corespunzător)
Nu întotdeauna tot ceeace se produce dintr-un bun se poate şi vinde la un anumit preț. Apare aşa numita problemă a elasticității prețului: cantitatea de marfă vândută se află într-o relație inversă cu prețul cerut aşa cum arată curba preț – cerere (fig. 13.1.1)

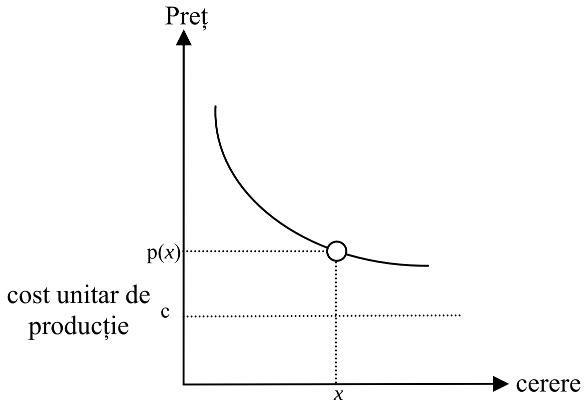


Figura 13.1.1

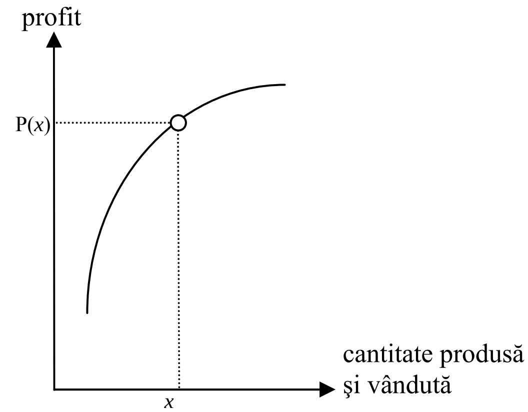


Figura 13.1.2

Dacă c este costul unitar de producție, cost pe care îl presupunem – pentru simplificarea expunerii – fix, atunci profitul firmei, rezultat din producerea şi vânzarea cantității x este dat de funcția neliniară (vezi fig. 13.1.2):

$$P(x) = x \cdot p(x) - c \cdot x$$

Dacă fiecare din produsele firmei are o asemenea funcție profit, notată $P_j(x_j)$, profitul total va fi exprimat prin funcția neliniară:

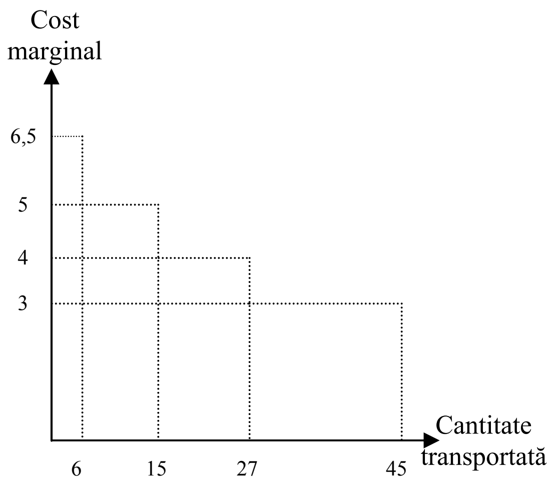
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} P_j(x_j)$$

O altă sursă de neliniarități în funcția obiectiv o constituie variația costului marginal - pentru producerea a încă unei unități dintr-un produs - în funcție de nivelul producției. Acest cost marginal poate să scadă în unele situații (ca urmare a trecerii la producția de serie, al acumulării experienței şi al perfecționării procesului de producție) iar în altele poate să crească (ore suplimentare, utilizarea în regim de urgență a unor capacități de producție mai costisitoare pentru satisfacerea unor cereri imediate)

Neliniaritatea poate apare şi în restricții într-o manieră asemănătoare. De exemplu, dacă există o restricție bugetară asupra costului producției, relația corespunzătoare va fi cu siguranță neliniară în cazul în care costul marginal al producției este variabil.

Pentru restricțiile privitoare la alte tipuri de resurse, neliniaritatea apare ori de câte ori consumurile nu sunt direct proporționale cu nivelele de producție.

Exemplul 1 În problema transporturilor se urmăreşte determinarea unui program pentru transportul unui produs de la diferite surse la diverşi consumatori, cunoscându-se cantitățile disponibile şi cererile, astfel încât costul total al transportului să fie minim. În programarea liniară, costul transportului unei unități de produs de la o anumită sursă la o anumită destinație a fost considerat constant, independent de cantitatea transportată. De multe ori se întâmplă ca la cantități mari să se acorde la transport anumite reduceri; în aceste situații, costul marginal al transportului unei unități suplimentare tinde să scadă şi ca o consecință, costul C(x) al transportării cantității x este dat de o funcție neliniară. Să analizăm datele din figurile 13.2.1 şi 13.2.2



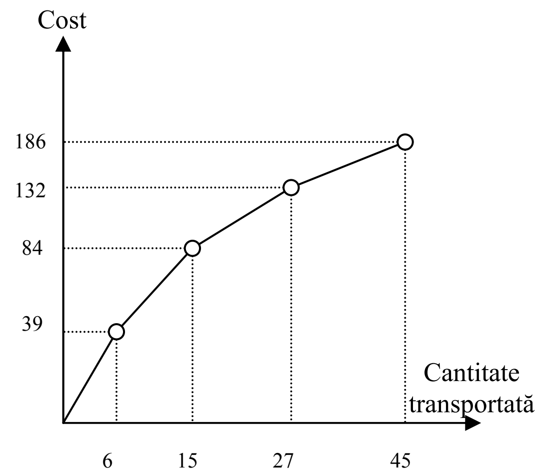


Figura 13.2.1

Figura 13.2.2

Fie x cantitatea transportată şi C(x) costul transportării cantității x.

- dacă $0 \leq x \leq 6$ costul unitar de transport este de 6,5 u.m. deci
$$C_1(x) = 6{,}5x \text{ u.m.;}$$
- dacă $6 \leq x \leq 15$, 6 unități vor fi transportate cu costul 6.5 u.m. per unitate iar următoarele cu numai 5 u.m. per unitate astfel că :
$$C_2(x) = 6.5 \times 6 + 5.(x - 6) = 9 + 5x$$
- dacă $15 \leq x \leq 27$, 15 unități vor fi transportate cu costul $C_2(15) = 84$ iar următoarele cu numai 4 u.m. per unitate. Costul total va fi :
$$C_3(x) = 84 + 4.(x - 15) = 24 + 4x$$
- dacă $27 < x \leq 45$, 27 unități vor fi transportate cu costul $C_3(27) = 132$ iar următoarele cu 3 u.m. per unitate de unde costul total:
$$C_4(x) = 132 + 3.(x - 27) = 51 + 3x$$

Prin urmare, costul C(x) al transportării a x unități este dat de funcția:

$$C(x) = \begin{cases} 6{,}5x & 0 \leq x \leq 6 \\ 9 + 5x & 6 < x \leq 15 \\ 24 + 4x & 15 < x \leq 27 \\ 51 + 3x & 27 < x \leq 45 \end{cases}$$

care este neliniară dar “liniară pe porțiuni”. Din figura 13.2.2 rezultă că pantele porțiunilor liniare ale graficului funcției C(x) sunt chiar costurile marginale evidențiate în figura 13.2.1

Dacă fiecare cuplu (sursă i, destinație j) are o funcție cost similară, aşa încât costul transportului a x_{ij} unități de la i la j este dat de funcția neliniară $C_{ij}(x_{ij})$ atunci costul total este reprezentat de funcția de asemenea neliniară:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j} C_{ij}(x_{ij})$$

Aceste considerații nu modifică restricțiile problemei de transport care rămân liniare:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad i = 1,2,...,m \quad \Leftrightarrow$$

suma cantităților livrate de sursa i nu depăşeşte disponibilul său;

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \quad j = 1,2,...,n \quad \Leftrightarrow$$

suma cantităților primite de consumatorul j acoperă cererea sa.

Exemplul 2 La terminalul unei conducte petroliere situat într-un port sosesc vasele A,B,C pentru a fi încărcate. Vasul A trebuie încărcat cu 15 mii tone, vasul B trebuie încărcat cu 20 mii tone iar vasul C trebuie încărcat cu 45 mii tone Terminalul dispune de pompe şi conducte care însumează o capacitate de încărcare de 2 mii tone pe oră. Se pune problema de a stabili ce debit trebuie afectat fiecărei nave astfel încât ele să fie încărcate în cel mai scurt timp.

Dacă se notează cu y_1 , y_2 , y_3 debitele (în mii t /oră) repartizate vaselor A,B,C, cu x_1 , x_2 , x_3 numărul de ore necesar încărcării lor şi cu t durata încărcării se obține uşor următorul program neliniar:

$$\begin{cases} (\min)\, t \\ x_1 y_1 = 15 \quad x_2 y_2 = 20 \quad x_3 y_3 = 45 \\ y_1 + y_2 + y_3 \leq 2 \\ x_1 \leq t\,,\, x_2 \leq t\,,\, x_3 \leq t \\ x_j, y_j \geq 0 \quad j = 1,2,3\,;\, t \geq 0 \end{cases}$$

Eliminând y_1 , y_2 , y_3 rezultă modelul mai simplu:

$$\begin{cases} (\min)\, t \\ \dfrac{15}{x_1} + \dfrac{20}{x_2} + \dfrac{45}{x_3} \leq 2 \\ x_1 \leq t\,,\, x_2 \leq t\,,\, x_3 \leq t \\ t \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Notă: Situația descrisă s-a dorit a fi doar un exemplu de neliniaritate în modelare întrucât rezolvarea este foarte simplă! Sperăm ca cititorul să fie de acord că soluția optimă implică cu necesitate:

- utilizarea completă a capacității de pompare $\rightarrow \frac{15}{x_1} + \frac{20}{x_2} + \frac{45}{x_3} = 2$

- terminarea încărcării vaselor în acelaşi timp $\rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = t$

Timpul minim de încărcare este de 40 ore iar capacitatea de pompare este împărțită astfel: 375 t/oră pentru vasul A, 500 t/oră pentru B şi 1125 t/oră pentru C.
Mergând pe aceeaşi linie, invităm cititorul să determine timpul minim de încărcare a celor trei vase în situația în care operația de încărcare a vasului B nu trebuie să dureze mai mult de 25 de ore din motive de urgentare a plecării.

13.2 Dificultăți cauzate de neliniaritate

Considerăm problema de optimizare:

$$(P)\begin{cases} \min f(x) & , \quad x \in R^n \\ g(x) \le 0 & , \quad g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)) \\ x \ge 0 \end{cases}$$

a cărei mulțime de soluții admisibile o notăm cu $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in R^n \middle| g(x) \le 0 \Leftrightarrow g_1(x) \le 0, g_2(x) \le 0, \ldots, g_m(x) \le 0; x \ge 0 \right\}$$

(P) se rescrie:

Să se determine $x^* \in \mathcal{A}$ cu proprietatea: $f(x^*) = \min\{f(x), x \in \mathcal{A}\}$

Este cunoscut faptul că dacă (P) este un **program liniar** (adică f şi $g_1, g_2, \ldots, g_m$ sunt funcții liniare) atunci mulțimea $\mathcal{A}$ este **convexă** şi mai mult chiar **poliedrală** (≡ intersecție finită de semispații).Aceste proprietăți ale mulțimii $\mathcal{A}$ plus faptul că funcția obiectiv este şi ea liniară ne asigură că:

- o soluție optimă – dacă există – este un punct de **minim global** adică:

  $$f(x^*) \le f(x) \quad (\forall)\ x \in \mathcal{A}$$

- cel puțin o soluție este un vârf al mulțimii $\mathcal{A}$

Cum numărul vârfurilor mulțimii poliedrale $\mathcal{A}$ este finit urmează că, pentru programul liniar (P), problema determinării unei soluții optime x^* din mulțimea, în general infinită, a tuturor soluțiilor admisibile se reduce la găsirea lui x^* în mulțimea finită a vârfurilor acestei mulțimi.
Metoda simplex realizează în mod sistematic această căutare oferind într-un număr finit de paşi (iterații) soluția optimă x^*.

Neliniaritatea obiectivului sau a unora dintre restricții face ca unele din proprietățile relevate mai sus să dispară fapt care duce la complicarea sarcinii de determinare a optimului.

1) De la bun început vom sublinia faptul că în programarea neliniară – cu câteva excepții – metodele de rezolvare obțin "teoretic" soluția optimă ca limită a unui şir de soluții. Astfel, un proces concret de optimizare neliniară este finit nu datorită structurii problemei ci prin voința utilizatorului care limitează numărul paşilor în funcție de o serie întreagă de factori cum ar fi: complexitatea calcului, timpul disponibil, performanțele echipamentului de calcul etc.

2) este posibil ca funcția obiectiv din (P) să aibe mai multe **minime locale** pe mulțimea soluțiilor admisibile $\mathcal{A}$ .Reamintim că $x^* \in \mathcal{A}$ s-a numit punct de minim local al funcției f dacă $f(x^*) \le f(x)$ pentru toți $x \in \mathcal{A}$, "**suficient de apropiați**" de x^*. Pentru exemplificare considerăm problema:

$$(P)\begin{cases}\min f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0\end{cases}$$

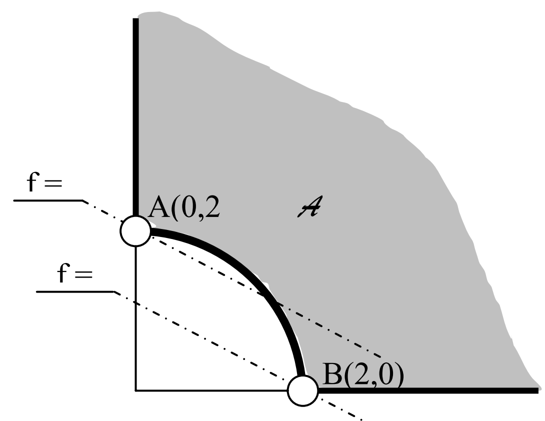


Figura 13.3

Mulțimea soluțiilor admisibile $\mathcal{A}$ este vizualizată în figura 13.3. Evident, $\mathcal{A}$ nu este o mulțime convexă. Punctul A(0,2) oferă obiectivului valoarea 6 care este cea mai mică valoare a funcției f pe soluțiile admisibile situate în imediata apropiere de A! Totuşi A nu este soluția optimă a problemei (P) deoarece în B(2,0) f are valoarea 4 < 6. Ca şi A, punctual B minimizează funcția obiectiv pe soluțiile admisibile "vecine" cu B dar, spre deosebire de A, B minimizează obiectivul pe întreaga mulțime $\mathcal{A}$ şi în consecință reprezintă soluția optimă a problemei (P). Prin urmare A şi B sunt puncte de minim local ale funcției obiectiv *f*, B fiind chiar un punct de minim global.

Posibilitatea existenței mai multor minime locale ale funcției obiectiv reprezintă o serioasă dificultate în rezolvarea unui program neliniar. Într-adevăr, prin însăşi formulare, într-o asemenea problemă se cere determinarea minimului global al obiectivului. Or, **toate metodele de optimizare neliniară cunoscute, nu reuşesc să determine decât cel mult un minim local, neexistând garanția că acesta coincide cu minimul global căutat.**

După cum vom vedea, dacă $\mathcal{A}$ este convexă iar funcția obiectiv este convexă şi se minimizează atunci aceasta are cel mult un minim local care – dacă există –este automat global ! Din fericire, marea majoritate a aplicațiilor economice au proprietățile de mai sus, fapt care constituie un serios avantaj.

3) Chiar dacă restricțiile din (P) sunt liniare dar obiectivul ramâne neliniar însă convex, soluția optimă, deşi se află pe frontiera lui $\mathcal{A}$ nu este neapărat vârf.

Considerăm următorul exemplu:

$$\begin{cases} \min f(x_1, x_2) = (x_1 - \frac{7}{2}x_2)^2 + 2(x_2 - 4)^2 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

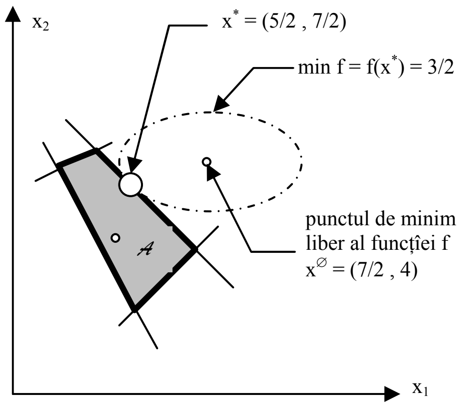


Figura 13.4

Curbele de nivel ale funcției obiectiv patratice *f* sunt elipse centrate în $x^{\varnothing}$ = (7/2, 4) care reprezintă şi punctul de minim nerestricționat al lui *f*. Se poate arăta, prin mijloace algebrice elementare, că *f* are pe $\mathcal{A}$ un minim global x^* = (5/2, 7/2) care nu este vârf al lui $\mathcal{A}$ - vezi figura 13.4

4) este posibil ca soluția optimă să fie situată în interiorul mulțimii $\mathcal{A}$. Pentru exemplificare să ataşăm restricțiilor din problema precedentă funcția

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 3)^2$$

al cărei minim liber este punctul $x^{\varnothing}$ = (2, 3). Deoarece $x^{\varnothing} \in \mathcal{A}$ (şi mai precis $x^{\varnothing} \in \text{Int}(\mathcal{A})$) acest punct reprezintă soluția optimă x^*.

13.3 Clase de probleme neliniare de optimizare

Pe o scară crescătoare a complexității şi ținând cont atât de utilitatea practică cât şi de cercetările întreprinse în vederea rezolvării, se pot contura unele clase de probleme neliniare.

1) **Problemele de optimizare fără restricții** au forma generală:

Să se determine $x^* \in R^n$ care minimizează valoarea funcției $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, minimul fiind luat după toți $x \in R^n$ în care funcția *f* este definită.

2) Probleme de optimizare cu restricții liniare şi funcție obiectiv neliniară. În această clasă un loc deosebit îl ocupă problemele de programare patratică în care funcția obiectiv este un polinom de gradul doi în variabilele sale:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ij} x_i x_j$$

Importanța problemelor de programare patratică este motivată prin:

- faptul că modelează cu suficientă acuratețe multe situații practice;
- se rezolvă prin metode derivate din metoda simplex într-un număr finit de paşi;
- rezolvarea multor probleme cu restricții liniare şi funcție obiectiv neliniară se poate reduce la rezolvarea unei secvențe de probleme de programare patratică ale căror funcții obiectiv aproximează din ce în ce mai bine obiectivul neliniar original.

3) Problemele de programare convexă se caracterizează prin:

- funcție obiectiv convexă dacă aceasta se minimizează (echivalent: funcție obiectiv concavă dacă aceasta se maximizează);
- restricțiile inegalități sunt de forma $g_i(x) \leq 0$ în care g_i este o funcție convexă (echivalent $g_i(x) \geq 0$ cu g_i funcție concavă);
- eventualele restricții egalități sunt liniare, cerință motivată prin aceea că funcțiile liniare sunt singurele funcții simultan convexe şi concave.

Problemele convexe au următoarele proprietăți fundamentale:

- mulțimea soluțiilor admisibile este convexă;
- funcția obiectiv admite cel mult un optim (minim sau maxim) local; automat acesta va fi un optim global şi va reprezenta optimul problemei;
- dacă optimul liber (nerestricționat) al funcției obiectiv nu este o soluție admisibilă atunci optimul restricționat se găseşte cu necesitate pe frontiera mulțimii $\mathcal{A}$.

Importanța acestei clase de probleme este covârşitoare. Într-adevăr:

- programarea convexă include programarea liniară ;
- în acest domeniu a fost depus cel mai mare efort de cercetare şi s-au obținut cele mai puternice rezultate teoretice (cum ar fi teoria dualității neliniare, condițiile de optimalitate Karush-Kuhn – Tucker) şi practice (metode şi algoritmi de optimizare);
- întregul formalism matematic al teoriei economice moderne se bazează pe ipotezele de convexitate.

4) Problemele de programare separabilă se caracterizează prin faptul că funcția obiectiv f ca şi funcțiile g_i din restricții sunt separabile în sensul următoarei definiții:

Funcția $f(x_1, x_2,..., x_n)$ se numeşte **separabilă** dacă ea se poate scrie ca o sumă de funcții, fiecare de câte o singură variabilă:

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n)$$

Separabilitatea este importantă prin aceea că uşurează optimizarea. De exemplu, optimizarea unei funcții separabile fără restricții se reduce la optimizarea independentă a termenilor!

5) Problemele de programare neconvexă reunesc toate problemele care nu satisfac ipotezele de convexitate. Ele sunt "grele" în primul rând din cauza faptului că au mai multe minime locale. După cum s-a mai spus, metodele actuale pot determina un asemenea optim local dar nu garantează că optimul găsit este cel global. Din fericire, există câteve tipuri de probleme neconvexe, utile în practică, care pot fi rezolvate fără dificultăți deosebite prin metode speciale. Printre aceste tipuri, se numără problemele de **programare fracționară**. Iată un exemplu:

$$\begin{cases} \min f(x) = \dfrac{cx + c_0}{dx + d_0} \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

unde se presupune că $dx + d_0 > 0$ pe $\mathcal{A} = \{x \in R^n \mid Ax \le b, x \ge 0\}$.
O asemenea problemă se reduce la un program liniar uzual punând:

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n) = \frac{1}{dx + d_0} \cdot x, \; t = \frac{1}{dx + d_0} \text{ astfel că } x = \frac{1}{t} \cdot y.$$

Rezultă programul liniar echivalent în $n + 1$ variabile $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ şi t:

$$\begin{cases} \min cy + c_0 t \\ Ay - bt \le 0 \\ dy + d_0 t = 1 \\ y \ge 0, \; t \ge 0 \end{cases}$$

13.4 Modelare neliniară prin exemple

Notă: din motive de unitate a expunerii toate problemele prezentate în continuare sunt însoțite şi de modalitățile de soluționare chiar dacă, pentru înțelegerea unora, sunt necesare cunoştințe ce vor fi date în secțiunile următoare. Cititorul este îndemnat ca, într-o primă etapă, să se familiarizeze cu partea de modelare, recomandându-i ca de îndată ce elementele de teorie a optimizării convexe sunt însuşite să revină şi să studieze şi soluțiile. Succes!

1. CARTONAŞUL GALBEN este o mică întreprindere producătoare de ambalaje de carton. Recent, ea a primit o comandă pentru 100 de cutii cu următoarele specificații:

- volumul unei cutii să fie de cel puțin 6000 cm^3;
- aria bazei să nu depăşească 400 cm^2;
- raportul dintre lățimea cutiei şi lungime să fie situat între 0,75 şi 0.9;
- dimensiunile orizontale, adică lungimea şi lățimea, să aibe cel puțin 15 cm dar nu mai mult de 26 cm;
- capacul şi fundul cutiei vor fi de două ori mai groase decât pereții laterali, deoarece fiecare pereche de flapsuri opuse – superioare, respectiv inferioare – trebuie să acopere integral suprafața capacului, respectiv a fundului conform figurii 13.5.

În figura 13.6, care însoţeşte comanda, se dau explicaţii privitoare la confecţionarea unei cutii. Este reprezentată foaia dreptunghiulară de carton din care rezultă o cutie. Porţiunile haşurate sunt resturi care se îndepărtează. Mai departe, în foaie se execută tăieturile interioare reprezentate de cele 6 segmente verticale groase după care foaia se îndoaie la 90º dealungul liniilor reprezentate punctat. În final, marginile libere ale pereţilor laterali se lipesc ca şi marginile libere ale ale flapsurilor inferioare pentru a forma fundul dublu al cutiei.
Costul confecţionării unei cutii este proporţional cu greutatea ei. Greutatea adezivului folosit la lipire este nesemnificativă astfel că greutatea unei cutii este proporţională cu aria suprafeţei cartonului încorporat.

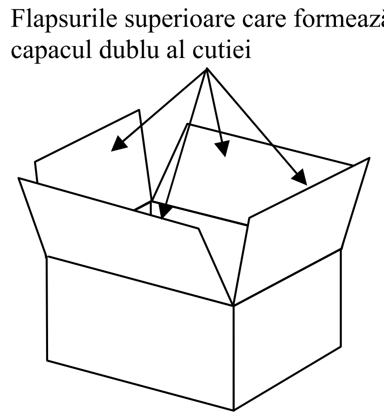


Figura 13.5

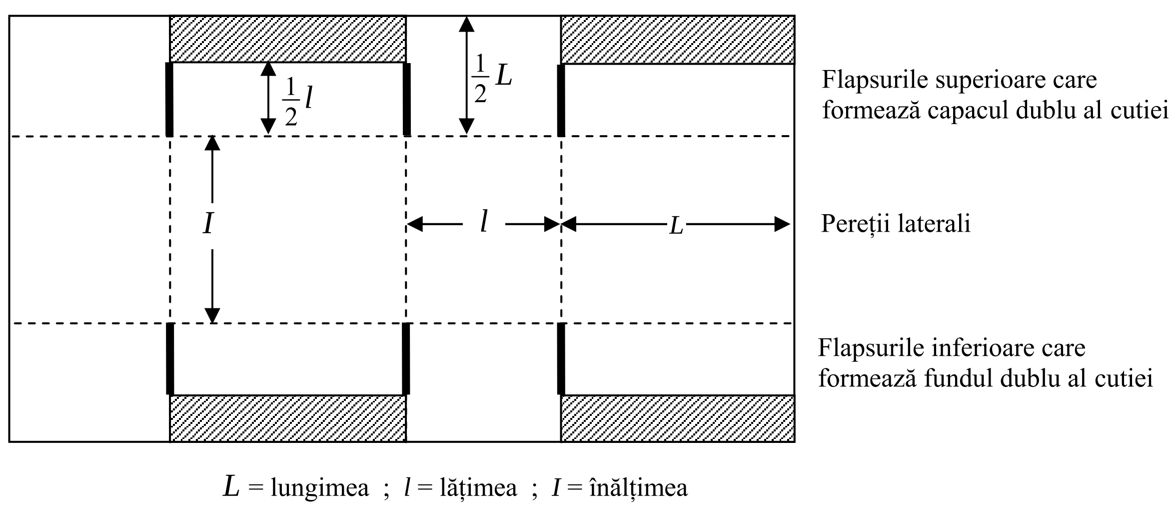


Figura 13.6

Ce problemă de optimizare se poate pune?

Soluţie: De vreme ce costul confecţionării unei cutii este proporţional cu aria suprafeţei cartonului încorporat, problema de optimizare constă în minimizarea acestei arii!

Să urmărim cu atenție datele figurii 13.6. Bucata dreptunghiulară de carton din care se confecționează o cutie are dimensiunile $2(L + l)$ şi $L + I$ având deci aria: $2(L+l)(L+I) = 2L^2 + 2L\cdot l + 2(L+l)\cdot I$. Aria porțiunilor haşurate, care se îndepărtează, însumează $4\cdot L\cdot \frac{1}{2}(L-l) = 2L^2 - 2L\cdot l$.Urmează că suprafața cartonului încorporat într-o cutie are aria: $A = 4L\cdot l + 2(L+l)\cdot I$ .Această expresie urmează a fi minimizată. Formalizăm specificațiile comenzii:

volumul cutiei trebuie să fie de cel puțin 6000 cm^3: $\rightarrow\ L\cdot l\cdot I \geq 6000$;
aria bazei cutiei nu trebuie să depăşească 400 cm^2 : $\rightarrow\ L\cdot l \leq 400$;
raportul dintre lățime şi lungime trebuie să fie situat între 0,75 şi 0,9 $\rightarrow\ 0{,}75 \leq \frac{l}{L} \leq 0{,}9$;
lungimea şi lățimea trebuie să fie situate între 15 şi 26 cm: $\rightarrow\ 15 \leq L, l \leq 26$

A rezultat programul neliniar:

$$(P)\begin{cases} \min A = 4L\cdot l + 2(L+l)\cdot I \\ \quad L\cdot l\cdot I \geq 6000 \\ \quad L\cdot l \leq 400 \\ \quad 0{,}75 \leq \dfrac{l}{L} \leq 0{,}9 \\ \quad 15 \leq L, l \leq 26 \end{cases}$$

Este uşor de văzut că soluția optimă verifică cu egalitate restricția de volum. Astfel, putem elimina variabila $I = \frac{6000}{L\cdot l}$.Cu notația $S = L\cdot l$ din care scoatem $l = \frac{S}{L}$ modelul (P) devine:

$$(P)\begin{cases} \min A = 4S + \dfrac{12000}{S}\left(L + \dfrac{S}{L}\right) \\ \left.\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{S}{0{,}9}} \leq L \leq \sqrt{\dfrac{S}{0{,}75}} \\ \dfrac{S}{26} \leq L \leq \dfrac{S}{15} \\ 15 \leq L \leq 26 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \max\left\{\sqrt{\dfrac{S}{0{,}9}}, \dfrac{S}{26}, 15\right\} \leq L \leq \min\left\{\sqrt{\dfrac{S}{0{,}75}}, \dfrac{S}{15}, 26\right\} \\ S \leq 400 \end{cases}$$

Un calcul elementar conduce la următoarea formă simplificată a programului (P):

$$(P)\begin{cases}\min\ A = 4S + \dfrac{12000}{S}\left(L + \dfrac{S}{L}\right)\\ \sqrt{\dfrac{S}{0{,}9}} \le L \le \sqrt{\dfrac{S}{0{,}75}}\\ 300 \le S \le 400\end{cases}$$

Pentru S fixat, A este o funcţie în variabila L, strict crescătoare pe intervalul valorilor permise lui L (lăsăm justificarea – cu ajutorul derivatei - în seama cititorului). Ca urmare, minimul lui A se atinge în $L = \sqrt{\dfrac{S}{0{,}9}}$. Eliminând şi variabila L obţinem forma finală a programului (P):

$$\begin{cases}\min\ A = 4S + \dfrac{7600}{\sqrt{0{,}1 \cdot S}}\\ 300 \le S \le 400\end{cases}$$

Funcţia A se dovedeşte a fi strict crescătoare pe intervalul valorilor permise variabilei S, astfel că minimul se atinge în $S^* = 300$ cu valoarea $\min\ A = 2587{,}57$ cm^2. Dimensiunile optime ale cutiei sunt:

$$L^* = \sqrt{\frac{S^*}{0{,}9}} = \sqrt{\frac{300}{0{,}9}} = 18{,}26\,\text{cm} \quad ; \quad l^* = \frac{S^*}{L^*} = 16{,}43\,\text{cm} \quad ; \quad I = \frac{6000}{S^*} = 20\,\text{cm}$$

Dacă se doreşte ca orice dimensiune să fie exprimată printr-un număr întreg de centimetri, soluţia cea mai bună ar fi $L = 19 \quad l = 16 \quad I = 20$ care satisface toate specificaţiile din comandă.Aria suprafeţei cartonului încorporat ar fi de 2616 cm^2 cu 1,1% mai mare decât valoarea minimă calculată mai sus.

2. O organizaţie internaţională de ajutor umanitar şi-a propus să trimită specialişti în două ţări subdezvoltate în vederea creşterii producţiei alimentare prin utilizarea unor tehnologii agricole performante.Experţii vor fi folosiţi în derularea unor proiecte pilot şi a unor programe de instruire în folosirea noilor tehnologii.

Numărul proiectelor care ar putea fi susţinute de agenţie este limitat de disponibilul a trei resurse esenţiale: echipament, experţi şi bani (tabelul 13.1)

Resurse	Necesar resurse pe proiect		Disponibil resurse
	Ţara 1	Ţara 2	
Echipament	–	5	20
Experţi	1	2	10
Bani	60	20	300 (mii $)

Tabelul 13.1

S-a estimat că derularea unui proiect în țara 1 (respectiv țara 2) ar putea satisface nevoile de hrană a 2 mii (respectiv 3 mii) de oameni.
Obiectivul organizației este acela de a folosi resursele disponibile de aşa manieră încât populația beneficiară a proiectelor derulate să fie cât mai mare în fiecare din cele două țări.
Notă: pentru simplitate, pe lângă proiectele întregi, vom admite şi fracții de proiect. Pentru fiecare fracție, necesarul de resurse ca şi populația beneficiară sunt proporționale cu mărimea fracției.

Vom lua ca variabile decizie.

$x_1 \equiv$ numărul proiectelor derulate în țara 1;
$x_2 \equiv$ numărul proiectelor derulate în țara 2.

Încadrarea necesarului de resurse în disponibile conduce la relațiile:

$$\begin{cases} 5x_2 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 60x_1 + 20x_2 \leq 300 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Există două obiective:

Maximizarea volumului populației beneficiare în țara 1: $\max 2x_1$;
Maximizarea volumului populației beneficiare în țara 2: $\max 3x_2$;

Cele două obiective vor fi urmărite simultan prin maximizarea minimului lor:

$$\max\left[f(x_1, x_2) = \min(2x_1, 3x_2)\right] \quad (2)$$

Introducând variabila:

$$z = \min(2x_1, 3x_2) \quad (3)$$

Programul neliniar (1) – (2) este echivalent cu programul liniar:

$$\begin{cases} \max z \\ z \leq 2x_1 \\ z \leq 3x_2 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2, z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max z \\ -2x_1 + z \leq 0 \\ -3x_2 + z \leq 0 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2, z \geq 0 \end{cases}$$

Utilizând algoritmul simplex rezultă soluția:

$$x_1^* = \frac{45}{11} = 4{,}09 \qquad x_2^* = \frac{30}{11} = 2{,}73 \qquad z^* = \frac{90}{11} = 8{,}182\ (= 2x_1^* = 3x_2^*)$$

Se observă că volumul populației beneficiare este acelaşi în ambele țări: 8,182 mii persoane.

Neliniaritatea programului (1) – (2) dar şi „asemănarea" lui cu un program liniar uzual vor rezulta cu claritate din următorul studiu „grafic". În fapt, (1) – (2) este un exemplu de **problemă de optimizare convexă** de care ne vom ocupa în secțiunile ulterioare.

Rezolvarea grafică a programului (1) – (2)

În figura 13.7 este vizualizată mulțimea soluțiilor admisibile $\mathcal{A}$.

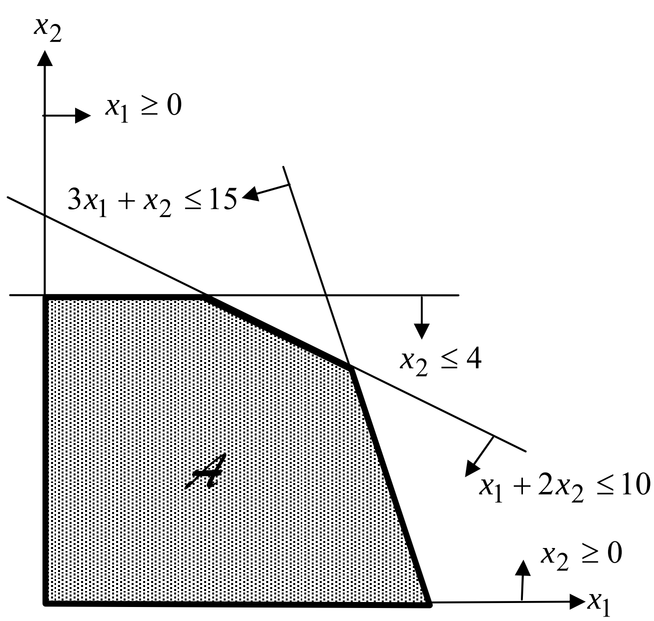


Figura 13.7

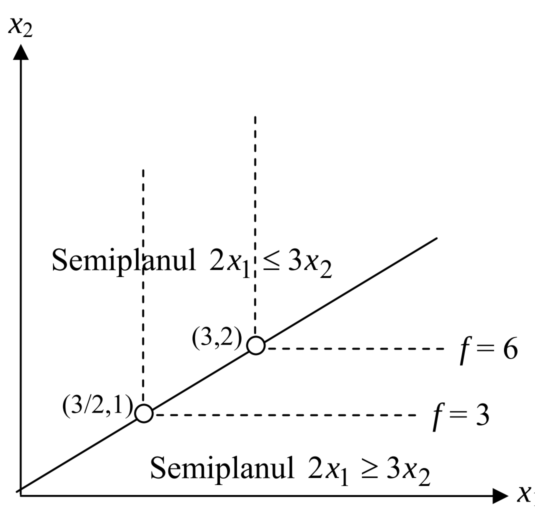


Figura 13.8

Vom reprezenta câteva **curbe de nivel** $f(x_1, x_2) = C$ (constant) ale funcției obiectiv:

De exemplu:

$$f(x_1,x_2) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 = 3 \\ 2x_1 \le 3x_2 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 3x_2 = 3 \\ 2x_1 \ge 3x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_2 \ge 1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 \ge 3/2 \end{cases}$$

Prin urmare, curba de nivel $f(x_1,x_2)=3$ se compune din punctele verticalei $x_1=\frac{3}{2}$ situate în semiplanul definit de inegalitatea $2x_1 \le 3x_2$ şi din punctele orizontalei $x_2=1$ situate în celălalt semiplan, dat de inegalitatea opusă $2x_1 \ge 3x_2$. Cele două porţiuni se întâlnesc pe dreapta $2x_1 = 3x_2$ în punctul $x_1=\frac{3}{2}, x_2=1$ rezultat din egalităţile $2x_1 = 3x_2 = 3$. Vezi figura 13.8 unde este reprezentată şi curba de nivel $f(x_1,x_2)=6$.

$$f(x_1,x_2)=6 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 = 6 \\ 2x_1 \le 3x_2 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 3x_2 = 6 \\ 2x_1 \ge 3x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 \ge 2 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 \ge 3 \end{cases}$$

Prin urmare, curbele de nivel ale funcţiei *f* sunt „unghiuri drepte” cu laturile paralele cu axele şi ale căror vârfuri se găsesc pe dreapta $2x_1 = 3x_2$. Este clar deci că *f* este o funcţie neliniară!
Cu cât este mai mare constanta C din ecuaţia curbei de nivel $f(x_1,x_2)=C$ cu atât este mai depărtat de origină vârful unghiului drept corespunzător.
Cu aceste observaţii şi pregătiri, rezolvarea grafică a programului neliniar (1) – (2) este dată în figura 13.9

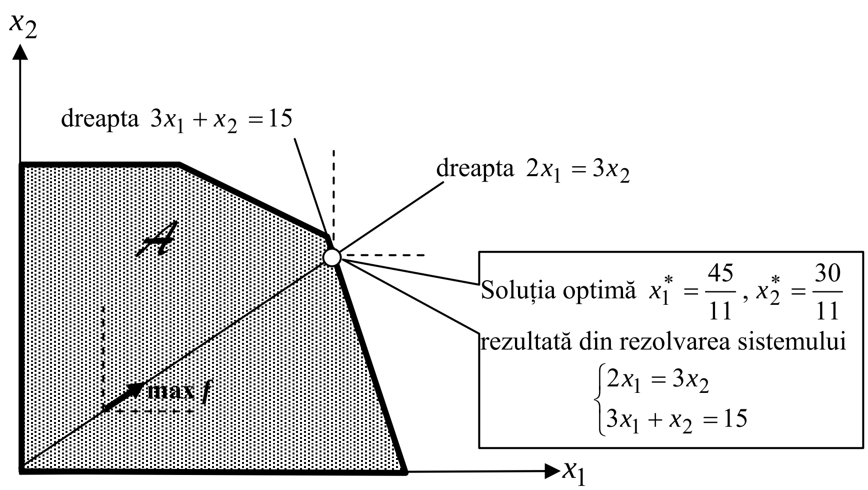


Figura 13.9

Interesant: soluţia optimă se află pe frontiera mulţimii soluţiilor admisibile $\mathcal{A}$ - ca în programarea liniară uzuală – dar nu este situată obligatoriu într-unul dintre vârfurile ei!

3. (Stocarea unui produs) Într-un proces de producţie, cererea pentru o materie primă M este constantă şi are intensitatea de *r* unităţi /unitatea de timp. Aprovizionarea nu poate fi făcută decât la anumite intervale de timp astfel că, pentru satisfacerea permanentă a cererii este necesară formarea unui stoc.
Ipoteze:

- stocul se reface la intervale egale de timp cu cantităţi egale;

- nu este permisă lipsa produsului M în stoc(ruperea stocului) iar comanda de refacere soseşte în momentul în care nivelul stocului curent este zero;

- fiecare comandă necesită un cost fix c_l , numit cost de lansare a comenzii, independent de mărimea comenzii;

- există un cost de stocare c_s pe unitatea de produs stocat şi unitatea de timp.

Problema de optimizare:

La ce interval de timp trebuie refăcut stocul şi în ce cantitate astfel încât cheltuieleile de întreţinere a socului pe unitatea de timp să fie minime?

Notaţii:

$x \equiv$ cantitatea din materia primă M care se comandă periodic pentru refacerea stocullui;

$t \equiv$ intervalul de timp dintre două aprovizionări succesive:

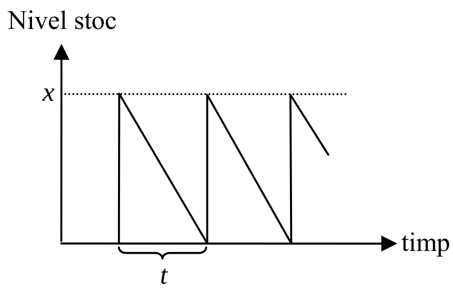


Figura 13.10

Soluţie:

Cererea fiind continuă şi cu intensitatea constantă r urmează că:

$$x = t \cdot r$$

(vezi şi figura 13.10). Costul întreţinerii stocului pe perioada dintre două aprovizionări succesive se compune din:

- costul c_l al lansării comenzii de refacere;
- costul stocării materiei prime M = stocul mediu × perioada de stocare × costul unitar de stocare $= \frac{1}{2} x \cdot t \cdot c_s$.

În consecinţă, întreţinerea stocului pe unitatea de timp are expresia:

$$K = \frac{1}{t}\left(c_l + \frac{1}{2} x \cdot t \cdot c_s\right) = \frac{1}{t} \cdot c_l + \frac{1}{2} x \cdot c_s$$

Înlocuind $t = \frac{x}{r}$ obţinem expresia costului unitar de întreţinere a stocului ca funcţie de o singură variabilă:

$$K(x) = \frac{r \cdot c_l}{x} + \frac{1}{2} x \cdot c_s$$

A rezultat următoarea problemă de optimizare fără restricţii:

$$\min K(x) = \frac{r \cdot c_l}{x} + \frac{1}{2} x \cdot c_s \;,\; x > 0$$

Rezolvarea problemei este simplă:

Pe intervalul (0, +∞), K(x) este o funcţie convexă deoarece: $K'(x) = -\frac{r \cdot c_l}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot c_s$ şi $K''(x) = 2\frac{r \cdot c_l}{x^3} > 0$. Ca urmare, zeroul (pozitiv) al derivatei K′(x) este punctul de minim căutat:

$$K'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 2\frac{r \cdot c_l}{c_s} \;\rightarrow\; x^* = \sqrt{2\frac{r \cdot c_l}{c_s}} \;\rightarrow\; t^* = \frac{x^*}{r} = \sqrt{2\frac{c_l}{r \cdot c_s}}$$

În concluzie, pentru ca întreținerea stocului pe unitatea de timp să aibe cea mai mică valoare este necesar ca refacerea stocului să se facă la intervalul de timp t^* cu cantitatea x^*.

4. (Stocarea mai multor produse într-un spațiu de depozitate limitat) Reluăm problema de stocare din exemplul precedent în cazul în care avem trei materii prime M_1,M_2,M_3 spațiul de depozitare având o capacitate limitată I (se presupune că pentru cele trei produse se foloseşte aceeaşi unitate de măsură)

Ipoteze şi notații:

- pentru fiecare proodus în parte se mențin ipotezele formulate în exemplul 13.3;
- $r_i \equiv$ intensitatea cererii pentru produsul M_i presupusă constantă în timp;
- $c_l^i \equiv$ costul lansării unei comenzi de refacere a stocului din produsul M_i;
- $c_s^i \equiv$ costul stocării unei unități de produs M_i pe unitatea de timp.

Problema de optimizare: La ce interval de timp şi cu ce cantitate trebuie refăcut stocul fiecărui produs astfel încât:

- capacitatea spațiului de stocare să nu fie depăşită;
- cheltuielile totale de întreținere ale stocurilor celor trei produse pe unitatea de timp să fie la cel mai mic nivel.

Model matematic: Cu notația $x_i \equiv$ cantitatea din produsul M_i comandată periodic pentru refacerea stocului acestui produs, cheltuielile de întreținere ale stocului din produsul M_i pe unitatea de timp au expresia:

$$K_i(x_i) = \frac{r_i \cdot c_l^i}{x_i} + \frac{1}{2} x_i \cdot c_s^i \quad i = 1,2,3 \qquad \text{vezi exemplul precedent!}$$

Pentru toate cele trei produse costul unitar de întreținere va fi:

$$K(x_1, x_2, x_3) = K_1(x_1) + K_2(x_2) + K_3(x_3)$$

Stocurile celor trei produse variază în timp şi în chip diferit deoarece cererea de consum este permanentă şi cu intensități diferite astfel că cerința încadrării acestor stocuri în spațiul de depozitare dat va fi „aproximată” prin cerința „formalizabilă”:

suma stocurilor **medii** să nu depăşească capacitatea de depozitare: $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} \le I$

(explicație: pentru produsul M_i, nivelul maxim posibil al stocului este cantitatea x_i cu care stocul se reface când a ajuns la zero iar nivelul minim este zero, când are loc o nouă refacere; ca urmare stocul mediu este $\frac{1}{2} x_i$)

Obținem următoarea problemă de optimizare cu funcție obiectiv neliniară şi separabilă şi cu o singură restricție liniară:

$$(P) \begin{cases} \min K(x_1, x_2, x_3) = K_1(x_1) + K_2(x_2) + K_3(x_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 2I \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

În problema precedentă s-a stabilit că funcțiile $K_i(x_i)$ sunt convexe pe intervalul (0 , +∞). La fel va fi şi funcția $K(x_1,x_2,x_3)$ pe ortantul pozitiv $x_1>0, x_2>0, x_3>0$. În concluzie, (P) este un program convex şi în formă canonică.

Pentru rezolvare introducem lagrangianul:

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,x_3,u) = K(x_1,x_2,x_3) + u(x_1+x_2+x_3-2I) \qquad x_1>0, x_2>0, x_3>0 \text{ şi } u \geq 0$$

Scriem condițiile de optimalitate Karush – Kuhn – Tucker:

(KKT)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \geq 0 \Leftrightarrow K_i'(x_i)+u \geq 0 \quad (1.i) \quad ; \quad x_i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow x_i[K_i'(x_i)+u]=0 \quad (1.i')$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \leq 0 \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3 \leq 2I \quad (2) \quad ; \quad u\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u(x_1+x_2+x_3-2I)=0 \quad (2')$$

$$x_1,x_2,x_3 \geq 0 \quad ; \quad u \geq 0$$

Valorile optime ale variabilelor x_1,x_2,x_3 vor fi cu siguranță pozitive astfel că din relațiile (1.*i*′), *i* = 1,2,3 va rezulta că la optim au loc egalitățile:

$$K_1'(x_1) = K_2'(x_2) = K_3'(x_3) = -u \tag{3}$$

Însă: $K_i'(x_i) = \frac{1}{2}c_s^i - \frac{r_i c_l^i}{x_i^2}$ astfel că din (3) obținem:

$$x_i(u) = \sqrt{\frac{2r_i c_l^i}{c_s^i + 2u}} \quad i = 1,2,3 \tag{4}$$

Prin construcție, $u \geq 0$ şi $x(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u))$ satisfac relațiile (1.*i*) şi (1.*i*′) din sistemul de condiții (KKT). În continuare vom arăta că există u^* astfel încât u^* şi $x(u^*)$ să verifice şi relațiile (2) şi (2′). $x(u^*)$ va fi atunci soluția optimă a programului (P).
Două situații sunt de discutat.

Este posibil ca $x(0)$ să verifice (2): $x_1(0)+x_2(0)+x_3(0) \leq 2I$ Atunci x(0 este soluția optimă a programului (P). Remarcăm faptul că $x_i(0)$ este punctual de minim liber (≡ nerestricționat) al funcției $K_i(x_i)$ de unde rezultă că $x(0)$ este punctul de minim liber al funcției obiectiv $K(x_1,x_2,x_3)$ din (P).

Dacă

$$x_1(0)+x_2(0)+x_3(0) > 2I \tag{5}$$

atunci la optim vom avea cu necesitate $u > 0$ şi în consecinţă $x(u)$ va trebui să satisfacă relaţia:

$$x_1(u) + x_2(u) + x_3(u) = 2I \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2r_1c_l^1}{c_s^1 + 2u}} + \sqrt{\frac{2r_2c_l^2}{c_s^2 + 2u}} + \sqrt{\frac{2r_3c_l^3}{c_s^3 + 2u}} = 2I \qquad (6)$$

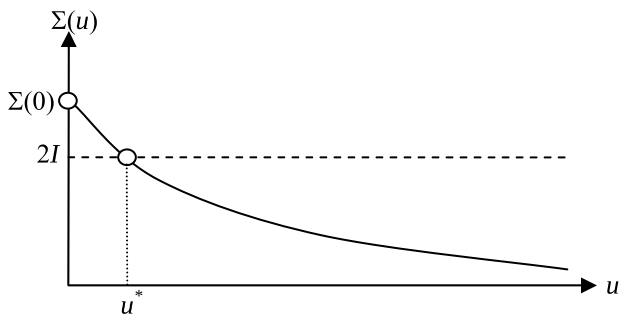


Figura 13.11

Ecuaţia (6) are o unică soluţie $u^* > 0$.Într-adevăr, funcţia $\Sigma(u) = x_1(u) + x_2(u) + x_3(u)$ este continuă şi strict descrescătoare pe $[0\ ,\ +\infty)$ şi în plus $\Sigma(0) > 2I$, $\lim\limits_{u\to\infty} \Sigma(u) = 0$ vezi figura 13.11

Rezolvarea "analitică" adică "cu formule" a ecuaţiei (6) este practic imposibilă astfel că pentru determinarea efectivă a lui u^* se poate folosi următoarea procedură numerică:

Se alege un "pas " h nu prea mare, de exemplu $h = 0{,}5$ şi se evaluează funcţia $\Sigma(u)$ în punctele h, $2h$,$3h$,….Ne oprim în momentul în care în două puncte consecutive $\underline{h} = (k-1)h$ şi $\overline{h} = k \cdot h$ avem $\Sigma(\underline{h}) > 2I$, $\Sigma(\overline{h}) < 2I$. Evident soluţia căutată u^* va fi situată între $\underline{h}$ şi $\overline{h}$.

Micşorăm pasul h, luând de exemplu $h = 0{,}1$ şi repetăm schema: evaluăm $\Sigma(u)$ în punctele $\underline{h} + h$, $\underline{h} + 2h$ …până când diferenţa $\Sigma(u) - 2I$ schimbă semnul. Soluţia u^* va fi situată într-un interval şi mai mic."Sondăm" noul interval cu un pas şi mai mic ş.a.m.d.

Procesul de calcul se opreşte în momentul în care u^* este localizată într-un interval cu lungimea mai mică decât o toleranţă ε dată, de exemplu ε = 0,001. Atunci, orice punct din intervalul de localizare va aproxima u^* cu toleranţa prestabilită.

Avertizăm cititorul că pentru înţelegerea următoarelor exemple sunt necesare cunoştinţele de teoria probabilităţilor!

5. Săptămânal,într-un atelier mecanic se prelucrează prin strunjire S piese cilindrice identice.. Diametrul pieselor prelucrate nu este întotdeauna acelaşi putând diferi de la o piesă la alta dintr-o mulţime de cauze. Astfel, diametrul unei piese poate fi considerat ca variabilă aleatoare normal distribuită. Valoarea medie μ a acestei variabile, socotită ca valoare de referinţă a diametrelor pieselor produse poate fi fixată sau modificată prin reglarea corespunzătoare a strungului. Se presupune totuşi că abaterea medie patratică σ este independentă de reglarea strungului adică este aceeaşi indiferent de valoarea medie μ, aleasă. Piesele strunjite sunt supuse unui control privind lungimea diametrului. O piesă este considerată bună dacă diametrul ei este situat între două limite $x_1 < x_2$. Dacă diametrul x este $\leq x_1$ piesa este declarată rebut. Dacă $x \geq x_2$ atunci piesa poate fi reprelucrată. Atelierul nu execută operații de reprelucrare ci vinde piesele respective altui atelier la un preț q. Piesele bune sunt vândute la un preț $p > q$. Fie c costul prelucrării unei piese în atelier.

Problema de optimizare : care este valoarea medie μ a diametrului pieselor ce trebuie luată ca valoare de referință pentru ca profitul mediu săptămânal să fie maxim.

Soluție: Utilizăm notațiile:

$x \equiv$ lungimea diametrului, socotită variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate $f(x,\mu)$, μ fiind valoarea medie. Abaterea medie patratică σ nu a mai fost pusă în evidență fiind o constantă.

P(μ) ≡ profitul săptămânal al atelierului; el este o variabilă aleatoare ce depinde nemijlocit de valoarea de referință μ a lungimii diametrului.

$\overline{P(\mu)} \equiv$ profitul mediu.

Putem scrie:

Profitul mediu ≡ venitul mediu rezultat din vânzarea pieselor bune + venitul mediu realizat din vânzarea pieselor cu diametrul prea mare – costul pieselor prelucrate = $p\cdot$ (numărul mediu de piese bune) + $q\cdot$ (numărul mediu de piese cu diametrul prea mare) – S · c

unde:

- numărul mediu de piese bune (cu diametrul $x_1 < x < x_2$) = S·
  Prob($x_1 < x < x_2$) = $S\cdot\int_{x_1}^{x_2} f(x,\mu)dx$

- numărul mediu de piese cu diametrul prea mare ($x \geq x_2$) = S· Prob($x \geq x_2$) = $\int_{x_2}^{\infty} f(x,\mu)dx$

Astfel:

$$\overline{P(\mu)} = p\cdot S\cdot\int_{x_1}^{x_2} f(x,\mu)dx + q\cdot S\cdot\int_{x_2}^{\infty} f(x,\mu)dx - S\cdot c$$

Problema de optimizare: Să se determine μ^* care minimizează $\overline{P(\mu)}$.

Soluția optimă μ^* satisface ecuația:

$$\overline{P(\mu)}' = 0 \quad\Leftrightarrow\quad p\cdot\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial\mu}(x,\mu)dx + q\cdot\int_{x_2}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial\mu}(x,\mu)dx = 0$$

Prin ipoteză, diametrul pieselor strunjite este o variabilă normală deci are densitatea de probabilitate:

$$f(x,\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ de unde } \frac{\partial f}{\partial\mu}(x,\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{x-\mu}{\sigma^2}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Cu notațiile simplificatoare:

$$v = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \quad \Rightarrow \quad dv = \frac{x-\mu}{\sigma^2}\cdot dx \quad \text{şi} \quad v_i = \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \quad i = 1,2$$

avem:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \mu}(x,\mu)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{v_1}^{v_2} e^{-v}dv = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(e^{-v_1} - e^{-v_2})$$

$$\int_{x_2}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \mu}(x,\mu)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{v_2}^{\infty} e^{-v}dv = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-v_2}$$

şi astfel:

$$\overline{P(\mu)}' = 0 \quad \Rightarrow \quad p(e^{-v_1} - e^{-v_2}) + qe^{-v_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad pe^{-v_1} = (p-q)e^{-v_2} \quad \Rightarrow \quad e^{v_2 - v_1} = \frac{p-q}{p}$$

de unde:

$$v_2 - v_1 = \ln\frac{p-q}{p}$$

Deoarece:

$$v_2 - v_1 = \frac{(x_2-\mu)^2 - (x_1-\mu)^2}{2\sigma^2} = \frac{(x_2-x_1)(x_1+x_2-2\mu)}{2\sigma^2}$$

urmează că:

$$x_1 + x_2 - 2\mu = \frac{2\sigma^2}{x_2 - x_1}\ln\frac{p-q}{p}$$

şi în final:

$$\mu^* = \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{\sigma^2}{x_2-x_1}\ln\frac{p}{p-q}$$

6. Proprietarul unui magazin de îmbrăcăminte şi-a rezervat \$3000 pentru achiziționarea a trei modele noi ce vor fi puse în vânzare în cursul următorului sezon. Noile modele trebuie cumpărate la începutul sezonului şi nu există posibilitatea modificării ulterioare a comenzilor. Modelele, codificate 1,2,3 sunt cumpărate la prețurile \$35, \$20 respectiv \$50 bucata şi revândute la prețurile \$60, \$37 respectiv \$105 bucata. Modelele nevândute până la sfârşitul sezonului vor fi vândute ulterior cu 20% sub prețul de achiziționare.Proprietarul crede că lipsa din magazin a unui model sau altul constituie o „pierdere de imagine” şi apreciază această pierdere la \$70, \$40 respectiv \$20 per bucată lipsă. Cererile pentru cele trei modele pot fi considerate variabile aleatoare normal distribuite cu mediile 30, 60 şi respectiv 15 şi abaterile medii standard 8,12 respectiv 3.
Câte articole din fiecare model ar trebui comandate la începutul sezonului pentru ca profitul mediu să fie maxim?

Modelul matematic. Pentru claritatea construcției vom utiliza următoarele notații:

- $i = 1,2,3$ codifică modelele ce vor fi achiziționate;

- r_i ≡ nivelul cererii pentru modelul i.Conform ipotezei r_i este o variabilă aleatoare normal distribuită cu densitatea de probabilitate

$$f_i(r_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

în care m_i ≡ valoarea medie şi σ_i ≡ abaterea medie standard.
Despre variabilele r_1 , r_2 , r_3 vom presupune că sunt independente, aceasta însemnând că un client nu va cumpăra alt model în cazul în care modelul preferat lipseşte.

- x_i ≡ numărul articolelor din modelul i ce urmează a fi achiziționate la începutul sezonului.
- q_i , p_i (cu $q_i < p_i$) ≡ prețul de achiziție respectiv prețul de vânzare în sezon al unui articol din modelul i;
- $\alpha_i < 1$ ≡procentul din prețul de achiziție la care va fi vândut un articol din modelul i după terminarea sezonului;
- π_i ≡ penalizarea pentru lipsa unui articol din modelul i în cursul sezonului;
- I ≡ suma investită în achiziționarea celor trei modele.

Pentru fiecare din cele trei modele putem scrie ecuația:

$$\underset{\text{comercializarea modelului } i}{\Pi_i(x_i) \equiv \text{profitul din}} = \underset{\text{modelului } i \text{ în sezon}}{V_i(x_i) \equiv \text{venitul din vânzarea}} + \underset{\text{rămas din modelul } i \text{ la sfârşitul sezonului}}{W_i(x_i) \equiv \text{venitul din vânzarea a ceeace a mai}} -$$

$$- \underset{\text{magazin a modelului } i \text{ în cursul sezonului}}{L_i(x_i) \equiv \text{penalizarea cauzată de lipsa din}} - \underset{\text{modelului } i \text{ la inceputul sezonului}}{q_i \cdot x_i \equiv \text{costul achiziționării}} \tag{1}$$

Deoarece cererea r_i este o variabilă aleatoare, componentele $V_i(x_i)$, $W_i(x_i)$, $L_i(x_i)$ - care depind de r_i - vor fi şi ele variabile aleatoare cu aceeaşi densitate de probabilitate f_i.
Valorile posibile ale variabilelor $V_i(x_i)$, $W_i(x_i)$, $L_i(x_i)$ sunt:

$$V_i(x_i) = \begin{cases} p_i x_i & \text{dacă} \quad x_i \le r_i \\ p_i r_i & \text{dacă} \quad x_i > r_i \end{cases}$$

$$W_i(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x_i \le r_i \\ \alpha_i q_i (x_i - r_i) & \text{dacă} \quad x_i > r_i \end{cases}$$

$$L_i(x_i) = \begin{cases} \pi_i (r_i - x_i) & \text{dacă} \quad x_i \le r_i \\ p_i r_i & \text{dacă} \quad x_i > r_i \end{cases}$$

Trecând la valori medii, din ecuația (1) obținem:

$$\overline{\Pi_i(x_i)} = \overline{V_i(x_i)} + \overline{W_i(x_i)} - \overline{L_i(x_i)} - q_i x_i \tag{2}$$

unde:

$$\overline{V_i(x_i)} = \int_{-\infty}^{x_i} p_i r_i f_i(r_i)\,dr_i + \int_{x_i}^{+\infty} p_i x_i f_i(r_i)\,dr_i$$

$$\overline{W_i(x_i)} = \int_{-\infty}^{x_i} \alpha_i q_i (x_i - r_i) f_i(r_i)\,dr_i \qquad \overline{L_i(x_i)} = \int_{x_i}^{+\infty} \pi_i (r_i - x_i) f_i(r_i)\,dr_i$$

Pentru simplificarea calculelor introducem notațiile:

$$F_i(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f_i(r_i)\,dr_i \qquad G_i(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} r_i f_i(r_i)\,dr_i$$

Conform teoriei variabilelor aleatoare continue avem relațiile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(r_i)\,dr_i = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} r_i f_i(r_i)\,dr_i = m_i$$

şi ca urmare:

$$\int_{x_i}^{+\infty} f_i(r_i)\,dr_i = 1 - F_i(x_i) \qquad \int_{x_i}^{+\infty} r_i f_i(r_i)\,dr_i = m_i - G_i(x_i)$$

Cu aceste pregătiri egalitatea (2) devine:

$$\overline{\Pi_i(x_i)} = (p_i - \alpha_i q_i + \pi_i)[G_i(x_i) - x_i F_i(x_i)] + (p_i - q_i + \pi_i)x_i - \pi_i m_i \qquad (3)$$

Profitul total:

$\Pi(x_1, x_2, x_3) = \Pi_1(x_1) + \Pi_2(x_2) + \Pi_3(x_3)$ este o variabilă aleatoare cu media:

$$\overline{\Pi(x_1, x_2, x_3)} = \overline{\Pi_1(x_1)} + \overline{\Pi_2(x_2)} + \overline{\Pi_3(x_3)} \qquad (4)$$

Această valoare urmează a fi maximizată în ipoteza că achizițiile făcute la începutul sezonului nu depăşesc plafonul I:

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 \le I \qquad (5)$$

Relațiile (4) şi (5) conduc la problema de optimizare:

$$(P)\begin{cases} \max \overline{\Pi(x_1, x_2, x_3)} \\ q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 \le I \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow (P)\begin{cases} \min \quad -\overline{\Pi(x_1, x_2, x_3)} \\ q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 - I \le 0 \text{ (forma canonică de prezentare)} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \qquad (6)$$

cu funcție obiectiv neliniară şi o singură restricție inegalitate liniară.

Observăm că funcția obiectiv $\overline{\Pi(x_1,x_2,x_3)}$ definită în (4) este separabilă adică este suma a trei funcții fiecare depinzând de o singură variabilă.Vom arăta că fiecare componentă $\overline{\Pi_i(x_i)}$ este o funcție concavă pe [0 , +∞) ; va rezulta că $\overline{\Pi(x_1,x_2,x_3)}$ este o funcție concavă pe R_+^3, ca sumă de funcții concave. Atunci funcția opusă $-\overline{\Pi(x_1,x_2,x_3)}$ va fi convexă pe R_+^3, de unde concluzia că programul neliniar (P) este convex!

Avem:

$$\overline{\Pi_i(x_i)}' = (p_i - \alpha_i q_i + \pi_i)[G_i'(x_i) - F_i(x_i) - x_i F_i'(x_i)] + p_i - q_i + \pi_i$$

Deoarece:

$$G_i'(x_i) = x_i f_i(x_i) \qquad\qquad F_i'(x_i) = f_i(x_i)$$

rezultă:

$$\overline{\Pi_i(x_i)}' = p_i - q_i + \pi_i - (p_i - \alpha_i q_i + \pi_i)F_i(x_i) \tag{7}$$

şi de aici:

$$\overline{\Pi_i(x_i)}'' = -(p_i - \alpha_i q_i + \pi_i) f_i(x_i) < 0 \quad \text{(pentru că } p_i - \alpha_i q_i + \pi_i > 0 \text{ şi } f_i(x_i) > 0\text{)}$$

ceeace probează că $\overline{\Pi_i(x_i)}$ este o funcție concavă pe [0 , +∞).

Ataşăm programului convex (P) lagrangianul:

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,x_3,u) = -\overline{\Pi(x_1,x_2,x_3)} + u(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 - I)$$

şi scriem condițiile de optimalitate Karush – Kuhn – Tucker:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \geq 0 \Leftrightarrow -\overline{\Pi_i(x_i)}' + uq_i \geq 0 \quad (8.i) \;;\quad x_i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow x_i\left(uq_i - \overline{\Pi_i(x_i)}'\right) = 0 \quad (8.i')$$

(KKT) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \leq 0 \Leftrightarrow q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 \leq I \quad (9)\;;\quad u\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}'0 \Leftrightarrow u(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 - I) = 0 \quad (9')$$

$$x_i \geq 0 \qquad ; \qquad u \geq 0$$

Folosind (7) inegalitatea (8.*i*) se rescrie:

$$F_i(x_i) \geq \frac{p_i - (1+u)q_i + \pi_i}{p_i - \alpha_i q_i + \pi_i} \tag{10.i}$$

Ca funcție de repartiție, $F_i(x_i)$ este o funcție strict crescătoare ale cărei valori acoperă intervalul [0 , 1]. Pe de altă parte, membrul drept din (10.*i*) este subunitar:

$$\frac{p_i-(1+u)q_i+\pi_i}{p_i-\alpha_i q_i+\pi_i}<1 \quad \text{deoarece } u \ge 0 \text{ şi } 0<\alpha_i<1$$

putând fi şi negativ pentru u suficient de mare. Ca funcție de u, membrul drept din (10.i) descreşte când u creşte!

Probăm că există valorile numerice $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ şi u^* care să satisfacă condițiile (KKT). Conform teoriei x^* va fi soluția optimă a programului (P).

Considerăm ecuația:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}=0 \quad \Leftrightarrow \quad F_i(x_i)=\frac{p_i-(1+u)q_i+\pi_i}{p_i-\alpha_i q_i+\pi_i} \tag{11}$$

Considerațiile precedente arată că pentru $u \ge 0$ „suficient de mic" ecuația (11) are o unică soluție pozitivă pe care o vom nota $x_i(u)$. Ca funcție de u, soluția $x_i(u)$ este strict descrescătoare!

Pentru u „mai mare", ecuația (11) poate avea soluție (oricum unică, F_i fiind strict monotonă) dar negativă (!) sau poate să nu aibe soluție (când membrul drept este negativ). Indiferent de situație vom avea atunci $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}>0$ în orice $x_i \ge 0$! În toate aceste cazuri, vom pune $x_i(u) = 0$. Funcția $x_i(u)$ astfel definită pentru toți $u \ge 0$ este continuă!

În concluzie pentru orice $u \ge 0$ există setul de valori $x(u)=(x_1(u),x_2(u),x_3(u))$ care depinde continuu de u şi care împreună cu u satisface relațiile (8.i) şi (8.i').

Rămâne să găsim u astfel încât u şi $x(u)$ să verifice relațiile (9) şi (9′).

Dacă pentru $u = 0$ am avea:

$$q_1x_1(0)+q_2x_2(0)+q_3x_3(0) \le I \tag{12}$$

atunci $u^* = 0$ şi $x^* = x(0)$ ar satisface toate condițiile (KKT) şi deci $x(0)$ ar fi soluția optimă a programului (P). De remarcat că $x_i(0)$ este şi soluția ecuației $\overline{\Pi_i(x_i)}' = 0$ ($\Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}=0$ cu $u = 0$ – vezi (8.i) şi (11)) ceeace este echivalent cu faptul că $x(0)$ reprezintă punctul de maxim liber (adică nerestricționat) al funcției $\overline{\Pi(x_1,x_2,x_3)}$!

Dacă din contră:

$$q_1x_1(0)+q_2x_2(0)+q_3x_3(0) > I$$

atunci „la optim" vom avea cu necesitate $u > 0$ şi ca urmare $x(u)$ va trebui să satisfacă egalitatea:

$$q_1x_1(u)+q_2x_2(u)+q_3x_3(u) = I \tag{13}$$

Ecuația (13) are o unică soluție $u^* > 0$. Aceasta rezultă din faptul că funcția:

$$\Sigma(u)=q_1x_1(u)+q_2x_2(u)+q_3x_3(u)\ , u \ge 0 \tag{14}$$

este continuă, strict descrescătoare şi în plus

$\Sigma(0) > I$
$\Sigma(u) = 0$ pentru u suficient de mare.

Recapitulând, u^* definit de ecuația (13) şi $x^* = x(u^*)$ satisfac toate condițiile (KKT) şi în consecință $x^* = x(u^*)$ este soluția optimă a programului convex (P).

Aplicația numerică
Rescriem ecuația (11) în formatul:

$$F_i(x_i) = \theta_i(u) \tag{15}$$

unde

$$\theta_i(u) = \frac{p_i - (1+u)q_i + \pi_i}{p_i - \alpha_i q_i + \pi_i}$$

Înlocuind

$$p_1 = 60\,;\; p_2 = 37\,;\; p_3 = 105$$
$$q_1 = 35\,;\; q_2 = 20\,;\; q_3 = 50$$
$$\pi_1 = 70\,;\; \pi_2 = 40\,;\; \pi_3 = 20$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0{,}8$$

rezultă

$$\theta_1(u) = 0{,}9314 - 0{,}3431 \cdot u$$
$$\theta_2(u) = 0{,}9344 - 0{,}3279 \cdot u$$
$$\theta_3(u) = 0{,}8824 - 0{,}5882 \cdot u$$

Prin ipoteză, F_i este funcția de repartiție a unei variabile aleatoare normal distribuite cu media m_i şi abaterea medie patratică σ_i astfel că putem scrie:

$$F_i(x_i) = \Phi\left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i}\right) \tag{16}$$

unde

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

este funcția de repartiție a variabilei normale standard cu media 0 şi abaterea medie patratică 1 numită şi funcția lui Laplace.
Din (15) şi (16) obținem:

$$x_i(u) = m_i + \sigma_i \cdot \Phi^{-1}(\theta_i(u))$$

Concret:

$$x_1(u) = 30 + 8 \cdot \Phi^{-1}(\theta_1(u))$$
$$x_2(u) = 60 + 12 \cdot \Phi^{-1}(\theta_2(u)) \tag{17}$$
$$x_3(u) = 15 + 3 \cdot \Phi^{-1}(\theta_3(u))$$

Notă: relațiile (17) nu pot fi considerate ca „expresii analitice” pentru componentele soluției variabile $x(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u))$ deoarece inversa Φ^{-1} a funcției Laplace nu are o asemenea expresie. Totuşi, folosind un tabel de valori pentru funcția Laplace putem calcula valorile funcțiilor $x_1(u)$, $x_2(u)$, $x_3(u)$ în orice argument *u*. O dată obținute aceste valori putem evalua şi funcția $\Sigma(u)$ definită în (14). După cum se ştie nu putem avea decât două situații: sau **I)** $x_1(0), x_2(0)$, $x_3(0)$ satisfac inegalitatea bugetară (12) sau **II)** trebuie găsit $u \geq 0$ astfel încât $x_1(u), x_2(u)$ $x_3(u)$ să verifice egalitatea (13). În tabelul 13.2 sunt afişate valorile funcțiilor $x_1(u), x_2(u), x_3(u)$ şi $\Sigma(u)$ pentru $u = 0$; 0,2 ; 0,6 ; 0,9 ; 1 ; 1,1 ; 1,05 şi 1,1. Situația **I)** nu are loc pentru că $\Sigma(0) > 3000$. Deoarece $\Sigma(1) > 3000$ şi $\Sigma(1{,}1) < 3000$ rezultă că situația **II)** va avea loc pentru un *u* situat între 1 şi 1,1. S-a ales argumentul intermediar 1,05 în care bugetul destinat achizițiilor este depăşit cu numai \$10,55 reprezentând 0,35% din valoarea prestabilită. Admițând această depăşire, programul neliniar convex (P) are soluția optimă

$$x^* = (31{,}4336\ ;\ 62{,}7324\ ;\ 13{,}1145)$$

pe care o putem accepta doar ca punct de referință întrucât, dacă avem în vedere semnificația lor, x_1, x_2, x_3 trebuie să fie numere întregi. Cea mai bună variantă de rotunjire este

$$x_1^* = 31 \text{ bucăți din modelul1;}$$

$$x_1^* = 63 \text{ bucăți din modelul2;}$$

$$x_1^* = 13 \text{ bucăți din modelul3;}$$

a căror achiziție (\$2995) nu depăşeşte bugetul inițial.

u	$\theta_1(u)$	$\theta_2(u)$	$\theta_3(u)$	$x_1(u)$	$x_2(u)$	$x_3(u)$	$\Sigma(u)$
0	0,9314	0,9344	0,8824	41,8896	78,1104	18,5610	3956,394
0,2	0,8628	0,8688	0,7648	38,7456	73,5492	17,1657	3685,365
0,6	0,7255	0,7377	0,5295	34,7952	67,6356	15,2220	3321,644
0,9	0,6226	0,6393	0,3530	32,4992	64,2792	13,8681	3116,461
1,0	0,5883	0,6065	0,2942	31,7848	63,2436	13,3764	3046,160
1,05	0,5711	0,5901	0,2648	31,4336	62,7324	13,1145	3010,549
1,1	0,5540	0,5737	0,2354	31,0864	62,2308	12,8361	2974,445
Soluția optimă întreagă				**31**	**63**	**13**	**2995**

Tabelul 13.2

Pentru completa lămurire a cititorului vom arăta cum se foloseşte un tabel de valori ale funcției Laplace Φ la calcularea unei valori $z = \Phi^{-1}(\theta)$ a funcției inverse Φ^{-1} într-un θ dat.

Evident, ecuațiile $z = \Phi^{-1}(\theta)$ şi $\Phi(z) = \theta$ sunt echivalente. Se caută în tabel două valori consecutive $\underline{z} < \overline{z}$ ale argumentului z cu proprietatea că valorile corespunzătoare $\underline{\theta} = \Phi(\underline{z})$ şi $\overline{\theta} = \Phi(\overline{z})$ ale funcției Φ încadrează valoarea dată θ: $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$. De regulă, argumentele $\underline{z}$ şi $\overline{z}$ sunt foarte apropiate, de exemplu $\bar{z} - \underline{z} = 0{,}01$, aşa încât se poate admite că funcţia Φ se comportă „liniar” pe intervalul $[\underline{z}, \bar{z}]$ - vezi figura 13.12. Atunci:

$$\frac{z - \underline{z}}{\bar{z} - \underline{z}} = \frac{\theta - \underline{\theta}}{\bar{\theta} - \underline{\theta}}$$

de unde

$$z = \underline{z} + \frac{\bar{z} - \underline{z}}{\bar{\theta} - \underline{\theta}}(\theta - \underline{\theta}) \tag{18}$$

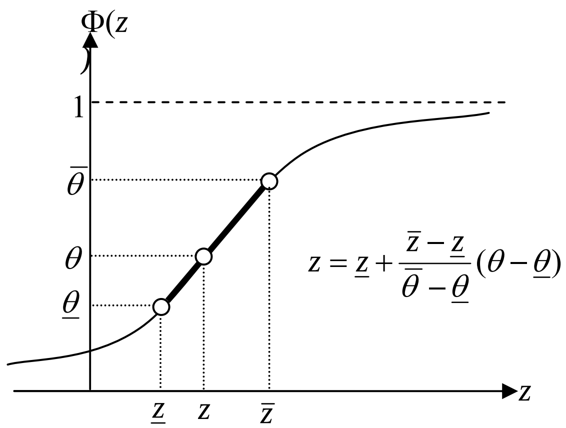


Figura 13.12

Formula (18) aproximează „suficient de bine” valoarea exactă $z = \Phi^{-1}(\theta)$ căutată. Să calculăm spre exemplu $z = \Phi^{-1}(\theta = 0{,}9314)$ unde $0{,}9314 = \theta_1(0)$ din tabelul 13.2 Se găseşte încadrarea:

$$\Phi(1{,}48) = 0{,}9306 < 0{,}9314 < 0{,}9319 = \Phi(1{,}49)$$

Deci: $\begin{cases} \underline{z} = 1{,}48 \\ \underline{\theta} = 0{,}9306 \end{cases}$ şi $\begin{cases} \bar{z} = 1{,}49 \\ \bar{\theta} = 0{,}9319 \end{cases}$.

Cu formula (18) obţinem: $z = 1{,}48 + \frac{1{,}49 - 1{,}48}{0{,}9319 - 0{,}9306}(0{,}9314 - 0{,}9306) = 1{,}48 + 0{,}0062 = 1{,}4862$

Deoarece $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$, un tabel de valori pentru funcţia Φ afişează numai valorile $\Phi(z)$ cu $z \geq 0$. Φ este o funcţie strict crescătoare astfel că valorile tabelate sunt $\geq \Phi(0) = 0{,}5$.

Să zicem că avem de calculat $z = \Phi^{-1}(\theta = 0{,}3530)$ unde $0{,}3530 = \theta_3(0{,}9)$ din tabelul 13.2. Deoarece $\theta < 0{,}5$ tragem concluzia că $z < 0$. Atunci $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) = 0{,}6470$.

Încadrarea $\Phi(0{,}37) = 0{,}6443 < 0{,}6470 < 0{,}6480 = \Phi(0{,}38)$ şi formula (18) conduc la:

$$-z = 0{,}37 + \frac{0{,}38 - 0{,}37}{0{,}6480 - 0{,}6443}(0{,}6470 - 0{,}0{,}6443) = 0{,}37 + 0{,}0073 = 0{,}3773 \quad \Rightarrow \quad z = -\,0{,}3773$$

7. Steven Cake este proprietarul unei cofetării şi un mare admirator al metodelor matematice aplicate în afaceri. El comandă zilnic un număr de prăjituri la un laborator la preţul *a* = \$1,90 per bucată. Prăjiturile sunt oferite clienţilor la preţul *b* = \$2,50 bucata. Prăjiturile nevândute în ziua respectivă sunt păstrate în frigider şi puse în vânzare a doua zi cu α = 40% sub preţul unei prăjituri proaspete. Cererea fiind destul de mare prăjiturile rămase peste noapte se vând toate a doua zi. Steven crede că lipsa acestui sortiment în cazul unei cereri foarte mari este de natură să afecteze prestigiul magazinului său şi apreciază pierderea la *c* = \$4 pe fiecare prăjitură lipsă. Din experienţa trecută, Steven ştie că cererea pentru sortimentul de prăjitură în cauză este o variabilă aleatoare, normal distribuită cu media *m* = 25 şi abaterea medie standard σ = 7.

Care ar fi numărul de prăjituri pe care Steven ar trebui să-l comande zilnic pentru ca profitul său mediu să fie maxim?

Soluție: Introducem notațiile:

$x \equiv$ numărul de prăjituri comandate zilnic;
$r \equiv$ nivelul cererii, presupus a fi o variabilă normală cu media m şi abaterea medie standard σ;
$V_1(x) \equiv$ venitul rezultat din vânzarea prăjiturilor proaspete;
$V_2(x) \equiv$ venitul rezultat din vânzarea prăjiturilor rămase peste noapte;
$L(x) \equiv$ pierderea datorată lipsei de prăjituri proaspete;
$C(x) \equiv$ costul prăjiturilor comandate;
$P(x) \equiv$ profitul obținut într-o zi.

Deoarece cererea este aleatoare este clar că şi V_1, V_2 şi L sunt variabile aleatoare ale căror valori posibile sunt:

$$V_1(x)=\begin{cases} bx & \text{dacă } x\le r \\ br & \text{dacă } x>r \end{cases}\quad;\quad V_2(x)=\begin{cases} 0 & \text{dacă } x\le r \\ (1-\alpha)b(x-r) & \text{dacă } x>r \end{cases}\quad;\quad L(x)=\begin{cases} c(r-x) & \text{dacă } x\le r \\ 0 & \text{dacă } x>r \end{cases}$$

Costul prăjiturilor comandate este: $C(x)=ax$.
Profitul zilnic:

$$P(x)=V_1(x)+V_2(x)-L(x)-C(x)$$

este o variabilă aleatoare cu media:

$$\overline{P(x)}=\overline{V_1(x)}+\overline{V_2(x)}-\overline{L(x)}-C(x)$$

în care:

$\overline{V_1(x)}=b\cdot\int_{-\infty}^{x} rf(r)dr+bx\cdot\int_{x}^{+\infty} f(r)dr$ $\equiv$ venitul mediu rezultat din vânzarea prăjiturilor proaspete;

$\overline{V_2(x)}=(1-\alpha)b\cdot\int_{-\infty}^{x}(x-r)f(r)dr$ $\equiv$ venitul mediu rezultat din vânzarea prăjiturilor rămase peste noapte;

$$\overline{L(x)}=c\cdot\int_{x}^{+\infty}(r-x)f(r)dr$$

şi unde $f(r)$ este densitatea de probabilitate a cererii r. Se ştie că:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(r)dr=1$ şi $\int_{-\infty}^{+\infty} rf(r)dr=m\equiv$ valoarea medie a variabilei r.

Dacă se notează:

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(r)dr\equiv$ funcția de repartiție a variabilei r şi $G(x)=\int_{-\infty}^{x} rf(r)dr$

atunci:

$$\int_x^{+\infty} f(r)dr = 1 - F(x) \qquad \int_x^{+\infty} rf(r)dr = m - G(x)$$

Este uşor de văzut că:

$$\overline{V_1(x)} = bG(x) + bx(1 - F(x)) = bx - b[xF(x) - G(x)]$$
$$\overline{V_2(x)} = (1-\alpha)bxF(x) - (1-\alpha)bG(x) = (1-\alpha)b[xF(x) - G(x)]$$
$$\overline{L(x)} = c(m - G(x)) - cx(1 - F(x)) = cm - cx + c[xF(x) - G(x)]$$

aşa încât:

$$\overline{P(x)} = -cm + (b + c - a)x - (c + \alpha b)[xF(x) - G(x)]$$

A rezultat problema de optimizare neliniară:

$$\max \overline{P(x)}\,,\ x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \min -\overline{P(x)}\,,\ x > 0$$

Funcția obiectiv $\overline{P(x)}$ care se maximizează (!) este concavă întrucât:

$$\overline{P(x)}' = b + c - a - (c + \alpha b)[F(x) + xF'(x) - G'(x)] = b + c - a - (c + \alpha b)F(x)$$
$$\overline{P(x)}'' = -(c + \alpha b)F'(x) = -(c + \alpha b)f(x) < 0$$

(s-au folosit relațiile $F'(x) = f(x)$ şi $G'(x) = xf(x)$)

Ca urmare, soluția optimă satisface ecuația:

$$\overline{P(x)}' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \frac{b + c - a}{c + \alpha b}$$

Prin ipoteză F este funcția de repartiție a unei variabile aleatoare normale, deci:

$F(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$ unde Φ este funcția Laplace $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ ale cărei valori sunt tabelate.

Înlocuind mai sus obținem:

$$\Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) = \frac{b + c - a}{c + \alpha b} \quad \Rightarrow \quad x^* = m + \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{b + c - a}{c + \alpha b}\right)$$

Aplicația numerică.

Pentru $a = 1{,}90$; $b = 2{,}50$; $c = 4$; $\alpha = 0{,}4$; $m = 25$; $\sigma = 7$ rezultă:

$$x^* = 25 + 7 \cdot \Phi^{-1}(0{,}92) = 25 + 7 \cdot 1{,}4053 = 34{,}8371 \approx 35$$

8. Fie X o variabilă aleatoare continuă cu funcția de repartiție F şi densitatea de probabilitate f. Conform definițiilor:

$$F(x) = P(X < x)$$

$$f(x) = F'(x) \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Fixăm un număr $\alpha \in (0,1)$, de regulă foarte aproape de 1. Se pune problema determinării unui interval $(a\ ,\ b)$, $a < b$ cu proprietățile:

Lungimea $b - a$ să fie minimă;

$P(a < X < b) \geq \alpha$

Intervalul (a , b) se numeşte **interval de încredere** pentru variabila aleatoare X , cu **pragul de încredere** α.

Luând a , b ca variabile obținem problema de optimizare:

$$\begin{cases} \min b - a \\ F(b) - F(a) \geq \alpha \end{cases} \qquad \text{deoarece } P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

Rescriem problema în forma canonică $\begin{cases} \min b - a \\ F(a) - F(b) + \alpha \leq 0 \end{cases}$ şi formăm lagrangianul:

$$\mathcal{L}(a,b,u) = b - a + u(F(a) - F(b) + \alpha)$$

Scriem condițiile de optimalitate KKT (atenție: nu avem condiții de negativitate explicit formulate):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = -1 + u \cdot F'(a) = 0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = \quad 1 + u \cdot F'(b) = 0 \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \leq 0 \Leftrightarrow F(b) - F(a) \geq \alpha \qquad (2); \qquad u\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u[F(b) - F(a) - \alpha] = 0 \qquad (2')$$

$$u \geq 0$$

Din (1.1) sau (1.2) deducem că $u \neq 0$. Prin urmare,la optim avem $u > 0$ şi din (2′) obținem: $F(b) - F(a) = \alpha$. Soluția problemei va rezulta din rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} -1 + u \cdot F'(a) = 0 \\ \ \ 1 - u \cdot F'(b) = 0 \\ F(b) - F(a) = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = f(b) = \dfrac{1}{u} \\ \displaystyle\int_a^b f(t)dt = \alpha \end{cases}$$

Este clar că rezolvarea depinde de expresia analitică a densității de probabilitate *f*. Vom studia cazul în care X este o variabilă **normal** distribuită: $X = N(m,\sigma)$. Se ştie că densitatea de probabilitate a variabilei $N(m,\sigma)$ are expresia:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$ unde m = valoarea medie şi σ = abaterea medie patratică.

Graficul ei este curba numită **clopotul lui Gauss** şi vizualizată în figura 13.13

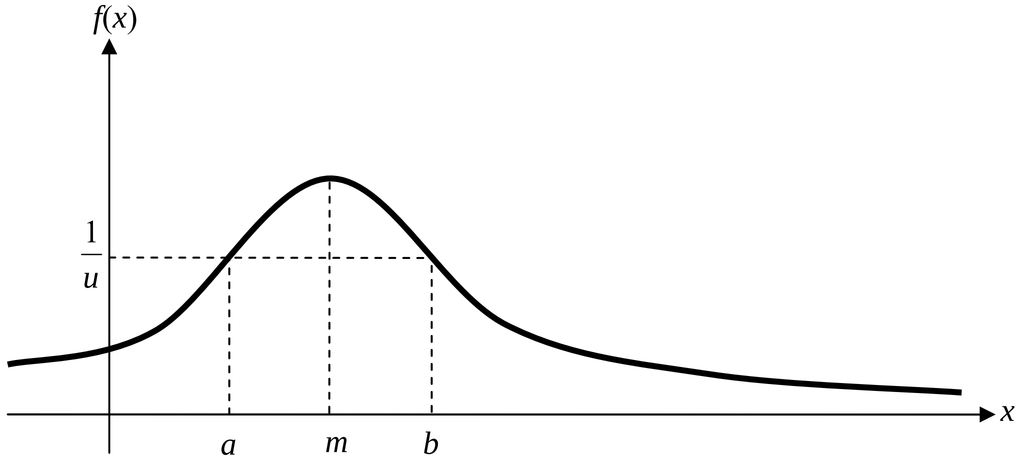


Figura 13.13

Curba este simetrică față de verticala $x = m$ pe care se află şi punctul de maxim. Graficul şi egalitățile $f(a) = f(b) = \frac{1}{u}$ arată că punctele a , b de pe axa orizontală sunt simetrice față de m, deci au forma:

$$a = m - k \quad ; \quad b = m + k$$

unde constanta $k > 0$ urmează a fi determinată. Se ştie că:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

unde Φ este funcția Laplace:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

ale cărei valori sunt tabelate.Atunci:

$$F(b)-F(a)=\alpha \Rightarrow \Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{k}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right)-1=\alpha \Rightarrow \Phi\left(\frac{k}{\sigma}\right)=\frac{1+\alpha}{2} \Rightarrow k=\sigma\cdot\Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

de unde:

$$a = m - \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \quad ; \quad b = m + \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

De exemplu, pentru $\alpha = 0{,}96$ avem $\Phi^{-1}\left(\frac{1+0{,}96}{2}\right) = \Phi^{-1}(0{,}98) = 2{,}056$ astfel că

$$a = m - 2{,}056 \cdot \sigma \quad ; \quad b = m + 2{,}056 \cdot \sigma$$

Probleme propuse

1. Compania BALVACA produce două tipuri de îngrăşăminte A şi B. Tipul A conţine 25% ingrediente active şi 75% ingrediente inerte. Tipul B conţine 40% ingrediente active şi 60% ingrediente inerte.Capacităţile de depozitare ale companiei limitează stocurile la 500t ingrediente active şi 1200t ingrediente inerte. Stocurile de materii prime se refac complet o dată pe săptămână. Tipul A este similar altor îngrăşăminte de pe piaţă şi la un preţ de $250 per tonă, compania nu are probleme în a vinde întrega cantitate produsă. Pentru tipul B nu există deocamdată pe piaţă un produs asemănător astfel că n-ar trebui să existe presiuni concurenţiale asupra preţului. Totuşi, vânzările trecute au arătat că cererea D pentru îngrăşământul B este influenţată de preţul P după relaţia (determinată statistic) P = 600 – D. Ce cantităţi de îngrăşăminte din fiecare tip ar trebui să producă săptămânal compania pentru a-şi maximiza venitul?
Indicaţie: Revedeţi schema generală de construire a unui model matematic din unitatea de învăţare 1! Se vor nota cu x_1 şi x_2 cantităţile în care vor fi produse (săptămânal) cele două tipuri de îngrăşăminte. Elementul de noutate este preţul la care va fi pusă în vânzare producţia tipului B, egal cu 600 – x_2! Astfel, funcţia obiectiv, care formalizează venitul va avea expresia neliniară $250x_1 + (600 - x_2)x_2$

2. Conducerea companiei MOV a decis construirea unei noi rafinării care va fi aprovizionată din trei porturi. Portul B se află la 300 km est şi 4oo km nord de portul A în timp ce portul C se află la 400 km est şi 100 km sud de portul B. Unde ar trebui situată rafinăria pentru ca lungimea totală a conductelor de legătură cu porturile să fie minimă?
Indicaţie: Enunţul este destul de ambiguu. Totuşi ceva se poate face: se va determina punctul pentru care suma distanţelor – în linie dreaptă – la cele trei porturi este minimă. Soluţia va putea fi luată ca punct de referinţă la stabilirea „în teren" a amplasamentului rafinăriei şi a traseelor conductelor.

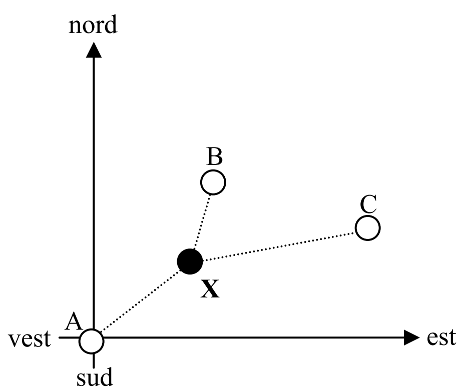


Figura 13.14

Considerăm un sistem de axe în care portul A este origina iar direcţiile axelor indică estul şi nordul – vezi figura 13.14. Atunci portul B va avea coordonatele (300,400). Poziţia portului C este dată relativ la B astfel că C are coordonatele (700 = 300 + 400,300 = 400 - 100)

Dacă X(x , y) este locația rafinăriei, rezultă problema de minimizare fără restricții:

$$\min S = XA + XB + XC = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-300)^2 + (y-400)^2} + \sqrt{(x-700)^2 + (y-300)^2}$$

3. a) Să se reprezinte grafic curbele de nivel $f(x_1, x_2) = 2$ şi $f(x_1, x_2) = 5$ ale funcției

$$f(x_1, x_2) = \min\{x_1 + 2x_2 - 3 \, , - x_1 + x_2 + 1\}$$

b) Se consideră programul neliniar:

$$(P)\begin{cases} \max f(x_1, x_2) \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Să se determine grafic soluția optimă.

c) Să se transforme (P) într-un program liniar echivalent şi să se rezolve cu algoritmul simplex. (vezi exemplul 13.9)

4. Să se determine soluția optimă a programului fracționar:

$$\begin{cases} \min f = \dfrac{2x_1 + 5x_2 - 3}{x_1 + x_2 + 1} \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(vezi indicațiile de rezolvare din secțiunea 13.3)

Bibliografie

Nica, V. T., Mustață, Fl., Mărăcine, V., Ciobanu, Gh., Cercetări Operaționale, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 1998

Nica, V., Capitole speciale ale Cercetărilor Operaționale, Centrul de învățământ economic deschis la distanță, ASE, Bucureşti, 2001

Hillier, F. S., Lieberman, G. J., Introduction to Operations Research, Mc Graw Hill Publishing Company, New York, ...,2001

Taha, A., H., Operations research. An Introduction, eight edition, Pearson Prentice Hall, 2007

Bronson, R., Naadimuthu, G., Theory and Problems of Operations Research, Tata Mc Graw Hill Publishing Company Limited, New Delhi, 2008

Unitatea de învățare 14

INTRODUCERE ÎN PROGRAMAREA NELINIARĂ
Elemente de programare convexă

Cuprins

14.1 Mulțimi şi funcții convexe
14.2 Forma canonică a unui program neliniar. Programe convexe
14.3 Lagrangianul unei probleme de optimizare în formă canonică.Puncte şa
14.4 Condițiile de optimalitate Karush – Kuhn – Tucker în programarea convexă
14.5 Programe patratice convexe

Probleme propuse

14.1 Mulțimi şi funcții convexe

Reamintim că o mulțime de puncte din dreapta R sau din planul R^2 sau din spațiul fizic R^3 s-a numit convexă dacă o dată cu două puncte conținea şi segmentul care unea aceste puncte.

- singurele mulțimi convexe ale dreptei sunt intervalele;
- în figura 14.1 sunt reprezentate câteva mulțimi convexe şi neconvexe din plan;

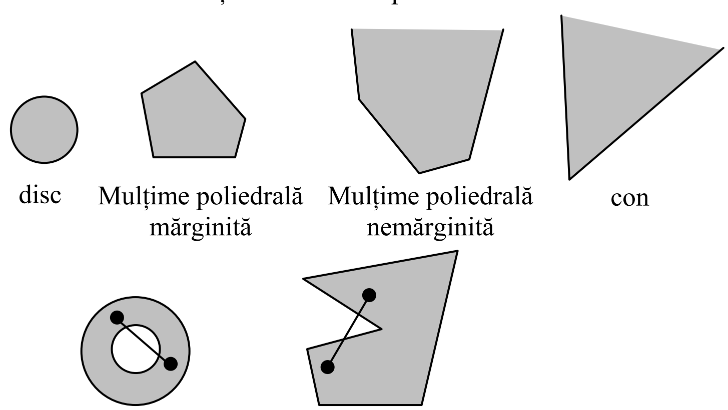


Figura 14.1

- sfera plină (sau bila), cubul, piramida sau cilindrul sunt exemple de corpuri convexe în spațiu.

Conceptul geometric de mulțime convexă este generalizat la spații generale în felul următor

Fie x, y două puncte din R^n. Se numeşte **segment cu extremitățile** x, y mulțimea punctelor $z \in R^n$ de forma:

$$z = (1-\alpha)x + \alpha y \quad \text{cu} \quad 0 \le \alpha \le 1$$

În planul R^2 sau spațiul R^3 regăsim conceptul geometric binecunoscut.

O mulțime $C \subseteq R^n$ se numeşte convexă dacă o dată cu două puncte x, y conține şi segmentul cu extremitățile x, y. Formal: C este convexă dacă oricare ar fi $x, y \in C$ şi scalarul $0 \le \alpha \le 1$

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in C$$

Mulțimea vidă, orice punct din R^n şi întreg spațiul R^n sunt exemple banale de mulțimi convexe. Se arată uşor că **intersecția unei familii arbitrare de mulțimi convexe este o mulțime convexă.**
Se demonstrează fără dificultate că următoarele mulțimi sunt convexe.

- Fie $a = (a_1, \dots, a_n) \in R^n$ un vector nenul şi $\beta \in R$. Mulţimea H a punctelor $x = (x_1, \dots, x_n)$ care satisfac egalitatea:

$$a \cdot x = \beta \quad \Leftrightarrow \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = \beta$$

se numeşte **hiperplan**. Vectorul nenul *a* se numeşte **normala** la hiperplanul H.

- Mulţimea punctelor $x = (x_1, \dots, x_n)$ care satisfac inegalitatea:

$$a \cdot x \le \beta \quad \Leftrightarrow \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \le \beta$$

se numeşte **semispaţiu** (închis).

- O intersecţie finită de hiperplane din R^n se numeşte **mulţime afină**. Urmează că o mulţime afină din R^n se identifică cu mulţimea soluţiilor unui sistem de ecuaţii liniare:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m$$

- O **mulţime poliedrală** (închisă) în R^n este o intersecţie finită de semispaţii. Rezultă că o mulţime poliedrală din R^n se identifică cu mulţimea soluţiilor unui sistem de inecuaţii liniare:

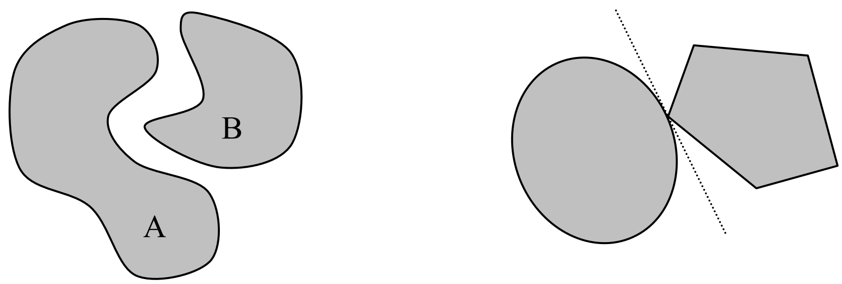
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1, \dots, m$$

- mulţime de puncte $K \subseteq R^n$ se numeşte **con** (convex) dacă

$$\begin{cases} x, y \in K \Rightarrow x + y \in K \\ x \in K \text{ şi } \alpha \ge 0 \Rightarrow \alpha x \in K \end{cases}$$

Separarea mulţimilor convexe

Să considerăm mulţimile plane disjuncte din figura 14.2 a). Observăm că nu există nici o dreaptă *d* care să le separe în sensul că A să se găsească într-unul din semiplanele determinate de dreapta *d* iar B să se găsească în celălalt semiplan.
Pentru mulţimile convexe din plan – disjuncte sau care se „ating” doar pe frontieră - separarea este întotdeauna posibilă aşa cum sugerează figura 14.2 b). Observaţia este generalizabilă



a) b)

Figura 14.2

Fie A , B mulțimi oarecari din spațiul R^n. Vom spune că hiperplanul H de ecuație

$$ax = \beta \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \beta \quad \text{cu } a = (a_1, \ldots, a_n) \neq 0$$

separă mulțimile A şi B dacă A se găseşte într-unul din semispațiile determinate de H iar B se găseşte în celălalt semispațiu.Formal, aceasta revine la a spune că:

$$a \cdot y \leq \beta \quad (\forall) y \in A \quad \text{şi} \quad a \cdot z \geq \beta \quad (\forall) z \in B$$

Separarea se consideră a fi **efectivă** dacă A şi B nu sunt incluse simultan în H. Echivalent, vom spune că mulțimile A şi B din R^n sunt efectiv separate dacă există $a \in R^n$, $a \neq 0$ cu proprietatea

$$a \cdot y \leq a \cdot z \quad (\forall) y \in A, (\forall) z \in B$$

inegalitatea fiind strictă pentru cel puțin un $y \in A$ şi un $z \in B$.
Un rezultat fundamental al analizei convexe este următoarea:

Teoremă (de separare a mulțimilor convexe) Dacă A şi B sunt mulțimi convexe în spațiul R^n ale căror interioare relative nu se intersectează (altfel spus, sau A şi B sunt disjuncte sau A şi B „se ating" pe frontieră) atunci ele pot fi efectiv separate în sensul că există $a \in R^n$, $a \neq 0$ astfel încât

$$a \cdot y \leq a \cdot z \quad (\forall) y \in A, (\forall) z \in B$$

inegalitatea fiind strictă pentru cel puțin un $y \in A$ şi un $z \in B$.

Separarea mulțimilor convexe este o proprietate extrem de utilă în aplicații. Astfel, pentru a demonstra că un anumit punct *v* aparține unei mulțimi convexe *S*, adesea se raționează prin absurd: se presupune că $v \notin S$,apoi *v* şi *S* „se separă" printr-un hiperplan, după care se exploatează structura simplă a hiperplanului separator.

Fie $C \subseteq R^n$ o mulțime convexă şi fie $f : C \to R$ o funcție numerică definită în toate punctele mulțimii C. **Funcția *f* se numeşte convexă (pe mulțimea convexă C) dacă inegalitatea**

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \le (1-\alpha) f(x) + \alpha f(y)$$

are loc pentru orice $x, y \in C$ **şi** $0 \le \alpha \le 1$ (din motive evidente, în aplicații, se poate lua $x \ne y$ şi $0 < \alpha < 1$)
Funcția *f* se zice strict convexă dacă inegalitatea

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) < (1-\alpha) f(x) + \alpha f(y)$$

are loc pentru toți $x \ne y$ **din C şi** $0 < \alpha < 1$**.**
Funcția *f* se zice **concavă** (respectiv strict concavă) dacă **opusa** ei *–f* este convexă (respectiv strict convexă) .Aceasta revine la schimbarea în inegalitățile de mai sus a semnelor $\le$ şi < în $\ge$ respectiv >.
Direct din definiție rezultă:

Propoziția 1 Fie f_1 , f_2 funcții convexe definite pe aceeaşi mulțime convexă $C \subseteq R^n$ .Dacă λ_1, λ_2 sunt scalari pozitivi atunci combinația $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ este o funcție convexă pe C.

Mulțimea

$$\text{Epi}(f) = \left\{ (x,t) \in R^{n+1} \mid x \in C \text{ şi } f(x) \le t \right\}$$

se numeşte **epigraful** funcției *f*. Pentru $t \in R$ variabil, mulțimile:

$$S_t = \left\{ x \in C \mid f(x) \le t \right\}$$

se numesc **secțiuni** ale funcției *f*.

Propoziția 2 i) Funcția *f* este convexă dacă şi numai dacă epigraful său Epi (*f*) este o mulțime convexă.
ii) Dacă *f* este o funcție convexă atunci orice secțiune a sa, S_t , este o mulțime convexă.

Demonstrație: i) $\Rightarrow$ Presupunem că *f* este o funcție convexă şi probăm că Epi (*f*) este o mulțime convexă. Fie (x,t) şi (y,s) două puncte din Epi (*f*) şi $0 \le \alpha \le 1$. Avem de arătat că:

$(1-\alpha)(x,t) + \alpha(y,s) = ((1-\alpha)x + \alpha y, (1-\alpha)t + \alpha s) \in \text{Epi}(f)$ ceeace revine la a proba că:

- $(1-\alpha)x + \alpha y \in C$
- $f((1-\alpha)x + \alpha y) \le (1-\alpha)t + \alpha s$

Conform definiției epigrafului:

$$(x,t) \in \text{Epi}(f) \Leftrightarrow x \in C \quad \text{şi} \quad f(x) \le t \quad ; \quad (y,s) \in \text{Epi}(f) \Leftrightarrow y \in C \quad \text{şi} \quad f(y) \le s$$

Atunci $(1-\alpha)x + \alpha y \in C$ deoarece C este o mulțime convexă.
Funcția *f* fiind convexă, avem:

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \le (1-\alpha)t + \alpha s$$

$\Leftarrow$ Presupunem că Epi (*f*) este o mulțime convexă. Probăm că *f* este o funcție convexă.
Fie $x, y \in C$ **şi** $0 \le \alpha \le 1$**.** Avem de arătat că $f((1-\alpha)x + \alpha y) \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$**.**
În baza definiției epigrafului $(x, f(x))$ şi $(y, f(y))$ sunt puncte din mulțimea convexă Epi (*f*) şi ca urmare:

$$(1-\alpha)(x, f(x)) + \alpha(y, f(y)) \in \text{Epi}(f) \Leftrightarrow ((1-\alpha)x + \alpha y, (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)) \in \text{Epi}(f)$$

de unde:

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

ii) Fie $x, y \in S_t$ şi $0 \le \alpha \le 1$**.** Avem de arătat că $(1-\alpha)x + \alpha y \in S_t$ adică $f((1-\alpha)x + \alpha y) \le t$.
Prin ipoteză, $f(x) \le t$, $f(y) \le t$ şi cum *f* este presupusă convexă:

$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \le (1-\alpha)t + \alpha t = t$$

Notă: Reciproca afirmației ii) este falsă în general

Exemple de funcții convexe.

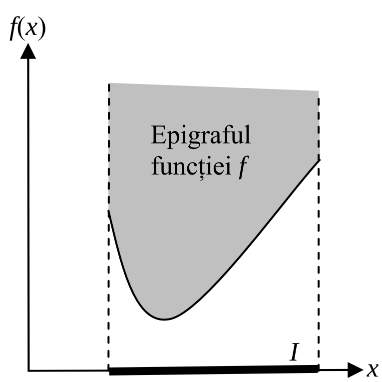


Figura 14.3

1) Pentru o funcție **de o singură variabilă** $f : I \to R$ definită pe un interval *I* convexitatea se traduce prin faptul că graficul ei „ține apa" ceeace este tot una cu a spune că mulțimea punctelor din plan situate „deasupra" graficului, adică **epigraful** funcției *f*, este o mulțime convexă – vezi figura 14.3
Dacă I este un interval deschis şi *f* este de două ori derivabilă pe *I* atunci
f este convexă $\Leftrightarrow$ $f''(x) \ge 0 \quad (\forall)x \in I$

2) Funcțiile liniare de mai multe variabile

$$f(x) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = c_0 + c \cdot x \quad \text{unde} \quad c = (c_1, \ldots, c_n) \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

sunt singurele funcții simultan convexe şi concave pe întreg R^n.

3) Norma euclidiană

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \to \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

este o funcție convexă pe R^n. Într-adevăr, se ştie că norma euclidiană are proprietățile:

$N_1)\quad \|x\| \geq 0 \quad (\forall) x \in R^n \ ; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$N_2)\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall) x, y \in R^n$

$N_3)\quad \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad (\forall) x \in R^n$ şi $\alpha \in R$

Dacă $x, y \in R^n$ şi $0 \leq \alpha \leq 1$ atunci .

$$\|(1-\alpha)x + \alpha y\| \leq \|(1-\alpha)x\| + \|\alpha y\| = |1-\alpha| \cdot \|x\| + |\alpha| \cdot \|y\| = (1-\alpha)\|x\| + \alpha\|y\|$$

4) Interesant este faptul că **patratul normei euclidiene este o funcție strict convexă pe R^n.** Într-adevăr, avem identitatea:

$$\|(1-\alpha)x + \alpha y\|^2 = (1-\alpha)\|x\|^2 + \alpha\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2$$

valabilă pentru orice $x, y \in R^n$ şi $\alpha \in R$.

Pentru $x, y \in R^n$, $x \neq y$ şi $0 < \alpha < 1$ vom avea $\alpha(1-\alpha)\|x - y\| > 0$ astfel că:

$$\|(1-\alpha)x + \alpha y\|^2 < (1-\alpha)\|x\|^2 + \alpha\|y\|^2$$

ceeace probează că funcția $\| \ \|^2$ este strict convexă pe R^n.În particular, pentru $x \neq y$ şi $\alpha = \dfrac{1}{2}$ obținem inegalitatea strictă:

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2 < \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

5) O **funcție patratică** în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este o funcție de forma:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_0 + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j$$

Cu notațiile matriciale:

$$p = (p_1, \ldots, p_n) \quad \text{vector linie} \quad ; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{vector coloană}$$

$$C = \left[c_{ij}\right] \quad 1 \le i, j \le n \quad \text{unde} \quad \begin{cases} c_{ii} = 2a_{ii} & i = 1, \ldots, n \\ c_{ij} = c_{ji} = a_{ij} & 1 \le i < j \le n \end{cases} \text{(C este deci o matrice simetrică!)}$$

Funcția f se scrie „compact”:

$$f(x) = p_0 + px + \frac{1}{2} x^T C x$$

Reamintim că o matrice patrată şi simetrică $C = \left[c_{ij}\right]_{1 \le i, j \le n}$ s-a numit:

pozitiv semidefinită dacă $x^T C x \ge 0 \quad (\forall) x \in R^n$;

pozitiv definită dacă $x^T C x > 0 \quad (\forall) x \in R^n$, $x \ne 0$.

Există următorul criteriu practic de recunoaştere:

Matricea C este pozitiv definită (respectiv, pozitiv semidefinită dacă toți determinanții

$$c_{11} \quad ; \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = \det C$$

sunt pozitivi (respectiv nenegativi).

Cu aceste pregătiri avem următoarea caracterizare a convexității funcțiilor patratice:

Propoziția 3. Funcția patratică $f(x) = p_0 + px + \frac{1}{2} x^T C x$ este convexă (respectiv strict convexă) pe R^n dacă şi numai dacă matricea C este pozitiv semidefinită (respectiv definită)

Demonstrație: În baza propoziției 1 şi a faptului că funcțiile liniare sunt şi convexe şi concave în acelaşi timp, funcția f este convexă (strict convexă) o dată cu funcția „pur patratică” $\varphi(x) = x^T C x$.

Demonstrația rezultă acum din identitatea:

$$\varphi((1-\alpha)x+\alpha y)=(1-\alpha)\varphi(x)+\alpha\varphi(y)-\alpha(1-\alpha)\varphi(x-y) \qquad (\forall)x,y\in R^n \text{ şi } \alpha\in R$$

(de remarcat că pentru $C = E \equiv$ matricea unitate $\varphi(x)=\|x\|^2$!)

6) Mai general, fie *f* o funcție definită şi având derivate parțiale de ordinul doi în orice punct al unei mulțimi convexe şi deschise C din R^n. Atunci *f* este convexă dacă şi numai dacă **matricea hessiană**

$$H(x)=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]$$

este pozitiv semidefinită, în fiecare punct $x \in$ C.
Dacă $H(x)$ este pozitiv definită în orice punct din C, funcția f este strict convexă (afirmația reciprocă nu are loc: funcția $f(x)=x^4$ este strict convexă pe R dar $f''(x)=12x^2$ se anulează în $x=0$)

Despre minimele funcțiilor convexe

Fixăm o funcție $f: C \to R$ definită pe o mulțime oarecare $C \subseteq R^n$. Reamintim că un punct $x^* \in C$ se numeşte **punct de minim local** al funcției *f* dacă inegalitatea $f(x^*) \le f(x)$ are loc pentru toți $x \in C$ **suficient de apropiați de** x^*. Formal:
x^* este un punct de minim local al lui *f* dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât inegalitatea $f(x^*) \le f(x)$ are loc pentru toți $x \in C$ cu $\|x-x^*\| < \varepsilon$.

Punctul x^* se numeşte **punct de minim global** al funcției *f* pe mulțimea C dacă inegalitatea $f(x^*) \le f(x)$ are loc penru toți $x \in C$.

Exemplu. i) Funcția $f(x)=-x^4+2x^2: R \to R$, al cărei grafic apare în figura 14.4 are un minim local în $x=0$ fără a avea un minim global pe R.

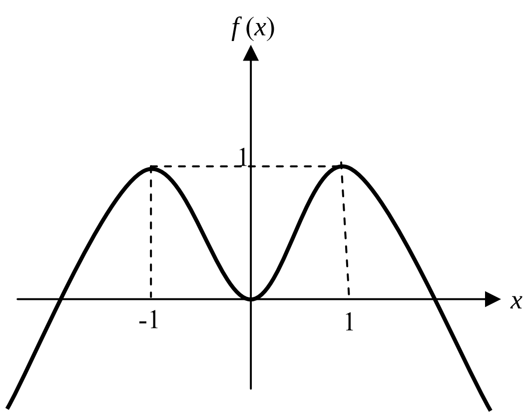


Figura 14.4

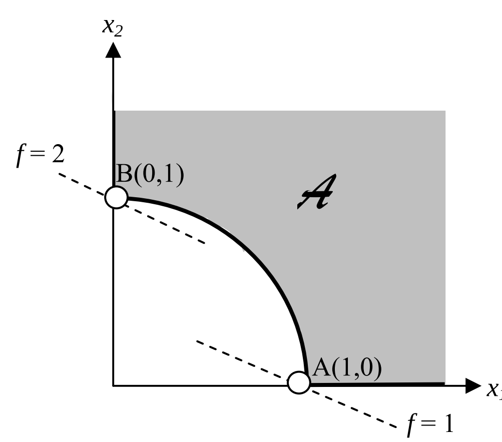


Figura 14.5

ii) Fie $\mathcal{A} = \left\{ x = (x_1, x_2) \in R^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \,,\, x_1 \geq 0 \,,\, x_2 \geq 0 \right\}$, vizualizată în figura 14.5 şi funcția liniară $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$. De notat că $\mathcal{A}$ nu este o mulțime convexă! În desen apar dreptele de nivel $f(x) = f(A) = 1 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 1$ şi $f(x) = f(B) = 2 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 2$. Se observă că *f* are două minime locale: unul în A cu valoarea $f(A) = 1$ şi altul în B cu valoarea $f(B) = 2$; punctul A este un minim global pe întreaga mulțime $\mathcal{A}$!

Importanța funcțiilor convexe pentru teoria optimizării rezidă în faptul că ele nu au minime locale. Într-adevăr, are loc:

Teorema 1 Fie $f : C \to R$ o funcție convexă definită pe mulțimea convexă $C \subseteq R^n$. Dacă $x^* \in C$ este un punct de minim local, atunci x^* este chiar un punct de minim global pe întreaga mulțime C.

Demonstrație: Prin ipoteză avem inegalitatea $f(x^*) \leq f(x)$ pentru toți $x \in C$ **suficient de apropiați de** x^* - vezi figura 14.6. Să presupunem prin absurd că x^* nu este punct de minim global. Aceasta înseamnă că în mulțimea C există (măcar) un punct x^{**} cu proprietatea

$$f(x^{**}) < f(x^*)$$

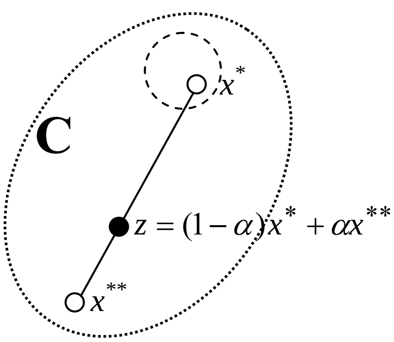


Figura 14.6

(evident, x^{**} nu se va afla în **imediata vecinătate** a lui x^* ...)
Deoarece C este o mulțime convexă, segmentul cu extremitățile distincte x^* şi x^{**} este în întregime inclus în C. Fie atunci

$$z = (1-\alpha)x^* + \alpha x^{**} \qquad 0 < \alpha < 1$$

un punct variabil în interiorul acestui segment. Deoarece *f* este o funcție convexă avem:

$$f(z) = f((1-\alpha)x^* + \alpha x^{**}) \leq (1-\alpha)f(x^*) + \alpha f(x^{**}) < (1-\alpha)f(x^*) + \alpha f(x^*) = f(x^*)$$

În concluzie, pentru orice punct $z \neq x^*$ de pe segmentul cu extremitățile x^* şi x^{**} are loc inegalitatea:

$$f(x^*) > f(z) \qquad (1)$$

Pe de altă parte, pentru α „suficient de mic” $(\alpha \to 0)$ punctul *z* va fi „suficient de apropiat” de x^* $(z \to x^*)$ şi conform ipotezei vom avea:

$$f(x^*) \leq f(z) \qquad (2)$$

Inegalitățile (1) şi (2) sunt mutual exclusive, astfel că x^* este într-adevăr un punct de minim global al funcției *f* pe întreaga mulțime C.

Observație: În exemplul precedent funcția $f(x_1,x_2)=x_1+2x_2$ este convexă pe R^2 fiind o funcție liniară. Totuşi, mulțimea pe care este dată **nu este convexă** şi ca urmare teorema 1 nu este aplicabilă...

Teorema 2 Fie $f : C \to R$ o funcție strict convexă definită pe mulțimea convexă $C \subseteq R^n$. Dacă *f* are un punct de minim pe mulțimea C acesta este unic.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că minimul funcției *f* pe mulțimea C se atinge în două puncte diferite $x^* \neq x^{**}$:

$$f(x^*) = f(x^{**}) = \min\{ f(x) \,,\, x \in C\}$$

Fie $z = \frac{1}{2}(x^* + x^{**})$ mijlocul segmentului cu extremitățile distincte x^*, x^{**}. Funcția f fiind strict convexă vom avea:

$$f(z) = f(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x^{**}) < \frac{1}{2} f(x^*) + \frac{1}{2} f(x^{**}) = \min\{f(x) \,,\, x \in C\}$$

Contradicție! Urmează că, dacă funcția strict convexă *f* are un punct de minim, acesta este unic.

Caracterizarea diferențială a funcțiilor convexe

Să presupunem dată o funcție numerică f, definită în toate punctele unei mulțimi convexe şi deschise $C \subseteq R^n$ şi care este **diferențiabilă** în fiecare punct din C.

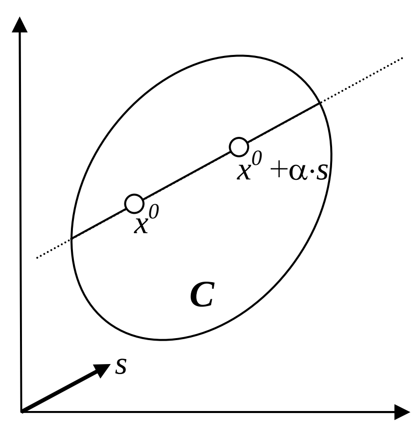


Figura 14.7

Fie

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad , \quad \cdots \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

gradientul funcției *f*. Fixăm $x^0 \in C$ şi $s \in R^n$, $s \neq 0$. Mulțimea scalarilor $\alpha \in R$ cu proprietatea că $x^0 + \alpha \cdot s \in C$ este un interval deschis pe care vom defini funcția

$$g(\alpha) = f(x^0 + \alpha \cdot s)$$

Funcția g va descrie comportarea funcției f când argumentul x se deplasează – în mulțimea C – pe dreapta care trece prin x^0 şi are direcția s (vezi figura 14.7)

Funcția g este derivabilă şi

$$g'(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} s_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0 + \alpha \cdot s) = \left\langle s \,,\, \nabla f(x^0 + \alpha \cdot s) \right\rangle$$

unde s-a notat cu $\langle x\,,\,y\rangle$ produsul scalar al vectorilor $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$

$$\langle x\,,\,y\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

În particular:

$$g'(0)=\left\langle s\,,\,\nabla f(x^0)\right\rangle \tag{3}$$

Cu aceste pregătiri avem următoarea caracterizare diferențială a convexității:

Teorema 3. În notațiile introduse, funcția f este convexă pe C dacă şi numai dacă pentru orice $x,y\in C$ are loc inegalitatea:

$$f(y)-f(x)\geq\langle y-x\,,\,\nabla f(x)\rangle$$

Demonstrație: $\Rightarrow$ Fie $x,y\in C$. Putem presupune că $x\neq y$. Pe segmentul cu extremitățile x,y (conținut în C) luăm punctul variabil $(1-\alpha)x+\alpha y$ cu $0<\alpha<1$. Deoarece f este presupusă convexă avem:

$$f((1-\alpha)x+\alpha y)\leq(1-\alpha)f(x)+\alpha f(y)\ \Rightarrow\ \frac{f(x+\alpha(y-x))-f(x)}{\alpha}\leq f(y)-f(x)$$

sau

$$\frac{g(\alpha)-g(0)}{\alpha-0}\leq f(y)-f(x)\ \text{ unde }\ g(\alpha)=f(x+\alpha(y-x))\ \text{şi}\ 0<\alpha<1. \tag{4}$$

g este derivabilă astfel că:

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{g(\alpha)-g(0)}{\alpha}=g'(0)=\langle y-x\,,\,\nabla f(x)\rangle\text{ , conform (3)}$$

Prin trecere la limită în (4) obținem ,$\langle y-x\,,\,\nabla f(x)\rangle\leq f(y)-f(x)$ adică inegalitatea cerută.

$\Leftarrow$ presupunem inegalitatea din enunț valabilă în toate perechile de puncte din C şi probăm că f este o funcție convexă.
Fie $x,y\in C$ şi $0\leq\alpha\leq1$; putem presupune că $x\neq y$ şi $0<\alpha<1$. Fie $z=(1-\alpha)x+\alpha y$ (z este un punct interior al segmentului cu extremitățile x,y). Scriem inegalitatea din enunț pentru următoarele perechi de puncte:

- pentru x şi z

$$f(x)-f(z)\geq\langle x-z\,,\,\nabla f(z)\rangle \tag{5}$$

- pentru y şi z

$$f(y)-f(z)\geq\langle y-z\,,\,\nabla f(z)\rangle \tag{6}$$

Înmulțim (5) cu 1-α şi (6) cu α după care adunăm relațiile membru cu membru:

$$(1-\alpha)f(x)+\alpha f(y)-(1-\alpha)f(z)-\alpha f(z)\geq\left\langle(1-\alpha)(x-z)+\alpha(y-z)\,,\nabla f(z)\right\rangle$$

Deoarece $(1-\alpha)(x-z)+\alpha(y-z)=(1-\alpha)x+\alpha y-z=z-z=0$ obținem:

$(1-\alpha)f(x)+\alpha f(y)-f((1-\alpha)x+\alpha y)\geq 0$ adică $f((1-\alpha)x+\alpha y)\leq(1-\alpha)f(x)+\alpha f(y)$.

Din teorema 3 rezultă următoarea caracterizare diferențială a minimului unei funcții convexe (dacă are...)

Teorema 4 Fie $f:C\to R$ o funcție convexă şi diferențiabilă definită pe mulțimea convexă şi deschisă $C\subseteq R^n$.Atunci $x^*\in C$ este un punct de minim al funcției *f* dacă şi numai dacă $\nabla f(x^*)=0$

Demonstrație: Implicația $\Rightarrow$ este valabilă fără ipoteza de convexitate şi este un rezultat al analizei clasice – teorma lui Fermat.

$\Leftarrow$ pentru orice $x\in C$ avem inegalitatea

$$f(x)-f(x^*)\geq\left\langle x-x^*\,,\nabla f(x^*)=0\right\rangle=0\quad\Rightarrow\quad f(x)\geq f(x^*)$$

Astfel, x^* este un punct de minim pentru funcția convexă *f*.

14.2 Forma canonică a unui program neliniar. Programe convexe

Orice problemă de optimizare poate fi formulată în următorii termeni:

Să se determine $x^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ **care minimizează valoarea funcției obiectiv**

$$f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\qquad(1)$$

cu satisfacerea restricțiilor

$$g_i(x)=g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq 0\quad i=1,\ldots,m\qquad(2)$$

şi a condițiilor explicite

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S\qquad(3)$$

În această formulare, *S* este o mulțime oarecare din R^n iar *f* şi $g_1,g_2,\ldots,g_m$ sunt funcții numerice arbitrare definite pe *S*. În cele mai multe aplicații, $S = R^n$ sau $S=R_n^+=\left\{x\in R^n\,,\,x\geq)\right\}$ dar *S* poate fi utilizată şi pentru includerea a tot felul de condiții suplimentare cum ar fi cerința ca variabilele să ia numai valori întregi.

Vom spune că formularea (1) – (3) reprezintă **forma canonică de prezentare** a problemei (P)

De reținut: **caracteristicile formei canonice sunt:**

- **funcția obiectiv se minimizează;**
- **restricțiile sunt inegalități omogene de tipul ≤ .**

Exemplul 1 Forma canonică a programului.

$$(P)\begin{cases} \max f(x) \\ g_1(x) \geq b_1 \\ g_2(x) = b_2 \\ g_3(x) \leq b_3 \\ x \in S \end{cases} \quad \text{este programul} \quad \begin{cases} \min\ -f(x) \\ -g_1(x) + b_1 \leq 0 \\ g_2(x) - b_2 \leq 0 \\ -g_2(x) + b_2 \leq 0 \\ g_3(x) - b_3 \leq 0 \\ x \in S \end{cases}$$

O problemă de optimizare în formă canonică

$$(P)\begin{cases} \min f(x) \quad x \in R^n \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, m \\ x \in S \end{cases} \tag{4}$$

se numeşte problemă de programare convexă sau program convex dacă

- **mulțimea** $S \subseteq R^n$ **este convexă;**
- **funcțiile *f* şi** $g_1, g_2, \ldots, g_m$ **sunt convexe pe mulțimea S.**

Mai general, o problemă de optimizare se va numi convexă dacă, adusă la forma canonică, este un program convex în sensul precizat mai sus.

Exemplul 2 se consideră programul (P) din exemplul 1 şi se presupune că mulțimea de definiție S este convexă. În ce condiții (P) este un program convex?

Din examinarea formei canonice rezultă că (P) este un program convex dacă:

- funcția $-f$ este convexă pe S $\Leftrightarrow$ f este o funcție concavă pe S;
- funcția $-g_1$ este convexă pe S $\Leftrightarrow$ g_1 este o funcție concavă pe S;
- funcțiile g_2 şi $-g_2$ sunt convexe pe S $\Leftrightarrow$ g_2 este simultan convexă şi concavă pe S $\Leftrightarrow$ g_2 este o funcție liniară pe S;
- funcția g_3 este o funcție convexă pe S.

În continuare, vom justifica unele proprietăți ale programelor convexe anunțate deja în unitatea de învățare 13,secțiunea 13.3.

Propoziția 4 Mulțimea soluțiilor admisibile ale unui program convex este convexă.

Demonstrație: Fie (P) un program convex pe care îl putem presupune a fi în forma canonică (4). Mulțimea soluțiilor sale admisibile:

$$\mathcal{A} = \{x \in S \mid g_i(x) \le 0 \, , \, i = 1, \ldots, m\}$$

este o intersecție de secțiuni ale unor funcții convexe

$$\{x \in S \mid g_1(x) \le 0\} \cap \cdots \cap \{x \in S \mid g_m(x) \le 0\}$$

Deoarece secțiunile unei funcții convexe sunt mulțimi convexe (propoziția 2, secțiunea 14.1) urmează că $\mathcal{A}$ este convexă ca intersecție de mulțimi convexe.

Propoziția 5 Dacă programul convex (P) are optim finit acesta este un optim global.

Demonstrație: Din nou putem presupune că funcția obiectiv din (P) este convexă urmând a fi minimizată pe mulțimea convexă a soluțiilor sale admisibile (propoziția 4). Afirmația decurge acum nemijlocit din teorema 1, secțiunea 14.1

14.3 Lagrangianul unei probleme de optimizare în formă canonică. Puncte şa

Fixăm un program de optimizare în formă canonică:

$$(P)\begin{cases} \min f(x) \quad x \in R^n \\ g_i(x) \le 0 \quad i = 1, \ldots, m \\ x \in S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min f(x) \\ g(x) \le 0 \\ x \in S \subseteq R^n \end{cases} \quad \text{unde} \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{bmatrix}$$

Pentru $x \in S$ şi $u = [u_1 \quad \cdots \quad u_m] \ge 0$ - vector linie! – definim funcția:

$$\mathcal{L}(x\,,u) = f(x) + u \cdot g(x) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n\,;u_1,\ldots,u_m) = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x_1,\ldots,x_n)$$

numită **lagrangianul** (asociat) **problemei** (P). Variabilele $u_1, \ldots, u_m$ se numesc **multiplicatori Lagrange** asociați restricțiilor $g_1(x) \le 0, \ldots, g_m(x) \le 0$.

Un cuplu (x^*, u^*) cu $x^* \in S$ şi $u^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*) \ge 0$ se numeşte **punct şa** al lagrangianului $\mathcal{L}$

dacă

$$\mathcal{L}(x^*, u) \le \mathcal{L}(x^*, u^*) \le \mathcal{L}(x, u^*) \qquad (1)$$

oricare ar fi $x \in S$ şi $u = [u_1 \quad \cdots \quad u_m] \ge 0$.
Aceasta revine la a spune că:

x^* minimizează funcţia $\mathcal{L}(-, u^*)$ pe mulţimea S;
u^* maximizează funcţia $\mathcal{L}(x^*, -)$ pe $R_+^m = \{u \in R^m, u \ge 0\}$.

Teorema 1 (de caracterizare a punctelor şa) Cuplul (x^*, u^*) cu $x^* \in S$ şi $u^* \ge 0$ este un punct şa al lagrangianului $\mathcal{L}$ dacă şi numai dacă (x^*, u^*) satisface condiţiile:

a) x^* minimizează funcţia $\mathcal{L}(-, u^*)$ pe mulţimea S;
b) $g(x^*) \le 0 \Leftrightarrow g_i(x^*) \le 0$, $i = 1, \dots, m$;
c) $u^* g(x^*) = 0 \Leftrightarrow u_i^* g_i(x^*) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Interpretare: Condiţia b) formalizează afirmaţia "x^* este o soluţie admisibilă a programului (P)" Condiţia c) este echivalentă cu afirmaţia : pentru $i = 1,\dots,m$ sau $u_i^* = 0$ sau $g_i(x^*) = 0$,adică x^* satisface cu egalitate restricţia $g_i(x) \le 0$.

Demonstraţia teoremei 1: Mai întâi vom observa că cerinţa a) coincide cu satisfacerea inegalităţii $\mathcal{L}(x^*, u^*) \le \mathcal{L}(x, u^*)$ $(\forall) x \in S$ din definiţia (1) a punctului şa.

$\Rightarrow$ Presupunem că (x^*, u^*) este un punct şa şi probăm satisfacerea condiţiilor b) şi c).

Din $\mathcal{L}(x^*, u) \le \mathcal{L}(x^*, u^*)$ $(\forall) u \ge 0$ rezultă

$$(u - u^*) g(x^*) \le 0 \quad (\forall) u \ge 0 \qquad (2)$$

Luând succesiv $u = u^* + e^i$ ($e^1, \dots, e^m$ sunt vectorii unitari din R^m) obţinem:
$g_i(x^*) \le 0$, $i = 1, \dots, m \quad \Leftrightarrow \quad g(x^*) \le 0$ şi condiţia b) este îndeplinită.

Luând $u = 0$ în (2) obţinem $u^* g(x^*) \ge 0$. Pe de altă parte din $u^* \ge 0$ şi $g(x^*) \le 0$ rezultă $u^* g(x^*) \le 0$. În consecinţă, $u^* g(x^*) = 0 \Leftrightarrow u_i^* g_i(x^*) = 0$, $i = 1, \dots, m$ şi condiţia c) este îndeplinită.

$\Leftarrow$ presupunem acum că (x^*, u^*) - cu $x^* \in S$ şi $u^* \ge 0$ - satisface condiţiile a) , b) , c). În virtutea unei observaţii anterioare rămâne de probat satisfacerea inegalităţii $\mathcal{L}(x^*, u) \le \mathcal{L}(x^*, u^*)$ oricare ar fi $u \ge 0$.

Pentru orice $u \geq 0$ avem $ug(x^*) \leq 0$ - deoarece $g(x^*) \leq 0$ - şi în consecinţă:

$$\mathcal{L}(x^*, u) = f(x^*) + u \cdot g(x^*) \leq f(x^*) = f(x^*) + u^* g(x^*) = \mathcal{L}(x^*, u^*)$$

Importanţa conceptului de punct şa este relevată parţial de următoarea:

Teorema 2 Dacă (x^*, u^*) este un punct şa al lagrangianului $\mathcal{L}$ atunci x^* este o soluţie optimă a programului (P).

Demonstraţie: Fie (x^*, u^*) un punct şa al lagrangianului $\mathcal{L}$. Conform teoremei 1 sunt îndeplinite condiţiile a) , b) , c). Condiţia b) arată că x^* este o soluţie admisibilă a programului (P).Dacă $\bar{x}$ este o soluţie admisibilă oarecare a lui (P) atunci

$f(x^*) = f(x^*) + u^* g(x^*) =$ ← deoarece $u^* g(x^*) = 0$ conform c);
$= \mathcal{L}(x^*, u^*) \leq \mathcal{L}(\bar{x}, u^*) =$ ← conform a);
$= f(\bar{x}) + u^* g(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$ ← pentru că din $u^* \geq 0$ şi $g(\bar{x}) \leq 0$ rezultă $u^* g(\bar{x}) \leq 0$.

În concluzie, x^* este o soluţie optimă a programului (P).

Comentariu: teorema 2 a fost obţinută în condiţii extrem de generale privitoare la mulţimea S şi la funcţiile f şi $g_1, \ldots, g_m$. În principiu, teorema reduce căutarea unei soluţii optime pentru (P) la determinarea unui punct şa pentru lagrangianul asociat. Există însă probleme de optimizare care au soluţii optime fără ca lagrangianul asociat să aibe puncte şa !
Pentru programele convexe, existenţa punctelor şa este garantată în condiţii destul de generale.

Teorema 3 Presupunem că programul în forma canonică :

$$(P)\begin{cases} \min f(x) \quad x \in R^n \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, m \quad g(x) \leq 0 \quad \text{cu} \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{bmatrix} \\ x \in S \end{cases}$$

este un **program convex**, aceasta însemnând că:

- mulţimea $S \subseteq R^n$ este convexă;
- funcţiile f şi $g_1, \ldots, g_m$ sunt funcţii convexe pe S.

În plus, presupunem îndeplinită condiţia:

(S) există $\bar{x} \in S$ cu proprietatea că $g_i(\bar{x}) < 0$, $i = 1, \ldots, m \quad \Leftrightarrow \quad g(\bar{x}) < 0$

Dacă $x^* \in S$ **este o soluție optimă a programului (P) atunci există** $u^* = (u_1^*, \dots, u_m^*) \geq 0$ **astfel încât cuplul** (x^*, u^*) **este un punct şa al lagrangianului:**

$$\mathcal{L}(x, u) = f(x) + u_1 g_1(x) + \cdots + u_m g_m(x) = f(x) + ug(x)$$

Demonstrație: Justificarea teoremei este o aplicație a proprietății de separare a mulțimilor convexe. Demonstrația conține şi unele detalii tehnice propuse ca exerciții.

orice vector din R^{m+1} va fi desemnat prin sigla (t, y) cu $t \in R$ şi $y = (y_1, \dots, y_m) \in R^m$ **.** Pentru fiecare $x \in S$ considerăm mulțimea:

$$A_x = \{(t, y) \in R^{m+1} \mid t \geq f(x), y \geq g(x) \Leftrightarrow y_i \geq g_i(x), i = 1, \dots, m\}$$

şi fie

$$A = \bigcup_{x \in S} A_x$$

Vom considera şi mulțimea:

$$B = \{(t, y) \in R^{m+1} \mid t < f(x^*), y < 0 \Leftrightarrow y_i < 0, i = 1, \dots, m\}$$

Se arată că (exercițiu):

- A şi B sunt mulțimi convexe din R^{m+1};
- $A \cap B = \varnothing$

Conform teoremei de separare a mulțimilor convexe, va exista un vector nenul $(r, v) \in R^{m+1}$ cu proprietatea că oricare ar fi $(t', y') \in A$ şi $(t, y) \in B$ are loc inegalitatea:

$$[r, v] \begin{bmatrix} t' \\ y' \end{bmatrix} \geq [r, v] \begin{bmatrix} t \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow rt' + vy' \geq rt + vy \Leftrightarrow rt' + v_1 y_1' + \cdots + v_m y_m' \geq rt + v_1 y_1 + \cdots + v_m y_m \qquad (1)$$

În particular, pentru $(t', y') = (f(x), g(x))$ cu $x \in S$ oarecare, obținem inegalitatea:

$$rf(x) + vg(x) \geq rt + vy \qquad (2)$$

valabilă oricare ar fi $t < f(x^*)$ şi $y < 0$.

Se arată că (exercițiu):

$$r \geq 0 \text{ şi } v \geq 0 \Leftrightarrow v_1 \geq 0, \dots, v_m \geq 0$$

Luând $t \to f(x^*)$ şi $y \to 0$ din inegalitatea (2) rezultă prin trecere la limită:

$$rf(x) + vg(x) \geq rf(x^*) \quad (\forall) x \in S \qquad (3)$$

Probăm că $r > 0$.
Presupunând prin absurd că $r = 0$ din (3) rezultă $vg(x) \geq 0 \quad (\forall)x \in S$
Deoarece vectorul $(r, v) = (0, v)$ este nenul şi $v \geq 0$ urmează că v are cu siguranță o componentă pozitivă. Atunci, pentru punctul $\overline{x}$ din condiția (S) a enunțului vom avea $vg(\overline{x}) < 0$, contradicție!

Inegalitatea (3) devine:

$$f(x) + \frac{1}{r}vg(x) \geq f(x^*) \quad \text{sau} \quad f(x) + u^* g(x) \geq f(x^*) \quad (\forall)x \in S \tag{4}$$

unde s- notat

$$u^* = \frac{1}{r}v \tag{5}$$

Evident $u^* \geq 0$ deoarece $r > 0$ şi $v \geq 0$

Pentru $x = x^*$ din (4) obținem $u^* g(x^*) \geq 0$. Pe de altă parte, din $u^* \geq 0$ şi $g(x^*) \leq 0$ rezultă $u^* g(x^*) \leq 0$ şi în consecință

$$u^* g(x^*) = 0 \tag{6}$$

Relația (6) ne dă posibilitatea să rescriem (4) în forma:

$$f(x) + u^* g(x) \geq f(x^*) + u^* g(x^*) \iff \mathcal{L}(x^*, u^*) \leq \mathcal{L}(x, u^*) \qquad \text{pentru toți } x \in \text{S}$$

Recapitulăm: x^* dat în enunț şi u^* definit în (5) au proprietățile:

- $\mathcal{L}(x^*, u^*) \leq \mathcal{L}(x, u^*) \quad (\forall)\ x \in \text{S};$
- $g(x^*) \leq 0$ deoarece x^* este o soluție a programului (P);
- $u^* g(x^*) = 0$.

În baza teoremei 1 cuplul (x^*, u^*) este un punct şa al lagrangianului $\mathcal{L}$. Demonstrația teoremei 3 este încheiată.

Observație: Condiția (S) din enunțul teoremei 3 se numeşte **condiția Slater de regularitate a restricțiilor** (Slater constraint qualification). Se poate arăta că dacă restricțiile $g_i(x) \leq 0$ şi mulțimea convexă S sunt date prin funcții **liniare**, atunci teorema 3 rămâne valabilă fără nici o altă condiție suplimentară.

14.4 Condițiile de optimalitate Karush – Kuhn – Tucker în programarea convexă

Reluăm programul în formă canonică (P) din secțiunea precedentă în situația $S = R^n$ **:**

$$(P)\begin{cases} \min f(x)\,,\, x \in R^n \\ g_i(x) \le 0 \quad i = 1,\ldots,m \end{cases}$$

Presupunem că funcțiile f şi $g_1,\ldots,g_m$ sunt definite pe întreg R^n, sunt **convexe** şi în plus sunt **diferențiabile.**

Lagrangianul problemei (P)

$$\mathcal{L}(x\,,u) = f(x) + u \cdot g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) \quad x \in R^n\,,\, u \in R_+^m$$

are proprietățile:

- pentru x fixat, $\mathcal{L}(x\,,u)$ este o funcție liniară în variabilele $u_1,\ldots,u_m$;
- pentru $u = (u_1,\ldots,u_m) \ge 0$ fixat, $\mathcal{L}(x\,,u)$ este o combinație liniară, cu coeficienți nenegativi, de funcții convexe şi diferențiabile pe R^n şi ca urmare este ea însăşi o funcție convexă şi diferențiabilă pe R^n (vezi propoziția 1, secțiunea 14.1).

Teorema 4. Se consideră programul **convex în formă canonică**:

$$(P)\begin{cases} \min f(x)\,,\, x \in R^n \\ g_i(x) \le 0 \quad i = 1,\ldots,m \end{cases}$$

În care funcțiile convexe f şi $g_1,\ldots,g_m$ sunt şi **diferențiabile** pe R^n. În plus, se presupune îndeplinită condiția:

(S) există $\bar{x} \in R^n$ cu proprietatea $g_i(\bar{x}) < 0 \quad i = 1,\ldots,m$

Atunci $x^* \in R^n$ este o soluție optimă a programului convex (P) dacă şi numai dacă există $u^* = (u_1^*,\ldots,u_m^*) \in R^m$ astfel încât (x^*, u^*) satisface relațiile:

	$\nabla_x \mathcal{L} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0$		$j = 1,\ldots,n$
(KKT)	$\nabla_u \mathcal{L} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \le 0$	$\langle u, \nabla_u \mathcal{L} \rangle = 0 \Leftrightarrow u_i \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0$	$i = 1,\ldots,m$
		$u \ge 0 \Leftrightarrow u_i \ge 0$	$i = 1,\ldots,m$

Notă: Mult timp condițiile încadrate s-au numit condițiile de optimalitate Kuhn – Tucker în programarea convexă, după numele celor ce le-au anunțat în 1950. Ceva mai târziu s-a descoperit că aceste condiții fuseseră formulate de Karush în teza sa de doctorat din 1939.

Comparând enunțurile teoremelor 3 şi 4 şi ținând cont şi de teorema 2 rezultă imediat că teorema 4 decurge nemijlocit din următoarea:

Teorema 5. În ipotezele teoremei 4 un cuplu (x^*, u^*) cu $x^* \in \mathrm{R}^n$ şi $u \in R_+^m$ este un punct şa al lagrangianului $\mathcal{L}(x, u)$ asociat programului convex (P) dacă şi numai dacă (x^*, u^*) verifică condițiile (KKT).

Demonstrație: Evident $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = g_i(x)$ de unde $u_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = u_i g_i(x) \quad i = 1, \ldots, m$. În consecință, îndeplinirea condițiilor:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \leq 0 \quad \text{şi} \quad u_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0 \quad i = 1, \ldots, m$$

nu înseamnă altceva decât îndeplinirea condițiilor b) şi c) din teorema de caracterizare a punctului şa!
A rămas de arătat că :

x^* este un punct de minim al funcției $\mathcal{L}(x, u^*)$ pe R^n $\Leftrightarrow$ $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, u^*) = 0$ $\Leftrightarrow$ (x^*, u^*) satisface sistemul de ecuații $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, \ldots, n$.

Deoarece $\mathcal{L}(\text{-}, u^*)$ este o funcție convexă pe R^n, echivalența decurge din caracterizarea minimului unei funcții convexe şi diferențiabile (teorema 4, secțiunea 14.1)

În mai toate problemele de optimizare practice, variabilele $x_1, \ldots, x_n$ sunt supuse condiției de nenegativitate

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n$$

În multe considerații teoretice, aceste condiții sunt incluse în sistemul restricțiilor „veritabile” sub forma

$$-x_j \leq 0 \quad j = 1, \ldots, n$$

Există şi situații în care este de preferat ca nenegativitatea variabilelor să fie tratată separat de restricțiile „propriu zise”.
Drept care, ne propunem a vedea ce formă au **condițiile de optimalitate (KKT) pentru programele convexe în care condițiile de nenegativitate sunt explicit formulate.**

Teorema 6 Se consideră programul în formă canonică:

$$(P)\begin{cases} \min\ f(x) \quad x \in R^n \\ g_i(x) \le 0 \quad i = 1,\dots,m \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Presupunem că funcțiile f şi $g_1,\dots,g_m$ sunt definite pe întreg R^n (pentru simplitate…), sunt convexe şi diferențiabile. În plus, se presupune că

(S) există $\overline{x} \in R^n$ cu proprietățile $\overline{x}_j > 0 \quad j = 1,\dots,n$ şi $g_i(\overline{x}) < 0 \quad i = 1,\dots,m$

Atunci, condiția necesară şi suficientă pentru ca $x^* \in R^n$ să fie o soluție optimă a programului convex (P) este să existe $u^* \in R^m$ astfel încât cuplul (x^*, u^*) să satisfacă relațiile:

(KKT)	$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} \ge 0$	$x_j \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0$	$j = 1,\dots,n$
	$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \le 0$	$u_i \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0$	$i = 1,\dots,m$
	$x_j \ge 0$	$u_i \ge 0$	$i = 1,\dots,m$ $j = 1,\dots,n$

unde

$$\mathcal{L}(x, u) = f(x) + u \cdot g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) \quad x \in R^n,\ u \in R_+^m$$

este lagrangianul problemei (P).

Demonstrație: Rescriem (P) în forma echivalentă:

$$(P')\begin{cases} \min\ f(x),\ x \in R^n \\ g_i(x) \le 0 \quad i = 1,\dots,m \\ -x_j \le 0 \quad j = 1,\dots,n \end{cases}$$

prin includerea condițiilor de nenegativitate în sistemul restricțiilor.

Asociind restricțiilor $g_i(x) \le 0$ variabilele $u_i \ge 0$ şi „noilor” restricții $-x_j \le 0$ variabilele $v_j \ge 0$, lagrangianul problemei (P′) este:

$$\mathcal{L}'(x, u, v) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) - \sum_{j=1}^{n} v_j x_j = \mathcal{L}(x, u) - \sum_{j=1}^{n} v_j x_j$$

Evident

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} - v_j \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial v_j} = -x_j$$

Ipotezele teoremei 5 sunt îndeplinite astfel că $x^* \in R^n$ este o soluție optimă a programului (P) dacă şi numai dacă există $u^* \in R^m$ care împreună cu x^*să satisfacă condițiile:

$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x_j} = 0 \Leftrightarrow v_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}$		$j = 1,\ldots,n$
$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u_i} \le 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \le 0$	$u_i \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial u_i} = 0 \Leftrightarrow u_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0$	$i = 1,\ldots,m$
$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial v_j} \le 0 \Leftrightarrow x_j \ge 0$	$v_j \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial v_j} = 0 \Leftrightarrow x_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0$	$j = 1,\ldots,n$
	$u_i \ge 0$ $v_j \ge 0$	$i = 1,\ldots,m$ $j = 1,\ldots,n$

Se vede uşor că aceste condiții se înscriu în formatul din enunțul teoremei 6.

Notă: Relațiile:

$$x_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0\,,\ j = 1,\ldots,n \tag{1}$$

$$u_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0\,, i = 1,\ldots,m \tag{2}$$

se numesc **relații de complementaritate** şi în orice context ele vor fi interpretate astfel:

pentru fiecare $j = 1,\ldots,n$ relația (1) arată că “la optim” fie $x_j = 0$ fie $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0$;

pentru fiecare $i = 1,\ldots,m$ relația (2) arată că “la optim” fie multiplicatorul u_i este zero fie restricția $g_i(x) \le 0$ este verificată cu egalitate.

Condițiile de optimalitate Karush - Kuhn - Tucker în programarea liniară

Orice program liniar este un program convex şi drept urmare este firesc să ne întrebăm ce formă au condițiile KKT în programarea liniară. În această secțiune vom arăta că, în cazul liniar, teorema de optimalitate 6 coincide cu un rezultat fundamental al dualității liniare, teorema ecarturilor complementare.

Fixăm un program liniar (P):

$$(P)\begin{cases} (\max) f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ , \ i = 1,\ldots,m \\ x_j \ge 0 \ , \ j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

în formă canonică de maximizare. Aducem (P) la forma canonică de prezentare a programelor neliniare:

$$(P)\begin{cases} (\min) \ -f(x) = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \le 0 \ , \ i = 1,\ldots,m \\ x_j \ge 0 \ , \ j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

Asociem celor *m* restricții multiplicatorii Lagrange $u_1,\ldots,u_m$ şi construim lagrangianul:

$$\mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n;u_1,\ldots,u_m) = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right)$$

pe care îl putem scrie şi astfel:

$$\mathcal{L}(x_1,\ldots,x_n;u_1,\ldots,u_m) = -\sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} - c_j \right) x_j$$

Calculăm:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} - c_j \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \qquad i = 1,\ldots,m$$

Conform teoremei 6, condiția necesară şi suficientă ca $x^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$ să fie o soluție optimă a programului liniar (P) este să existe $u^* = (u_1^*,\dots,u_m^*)$ astfel încât (x^*,u^*) să satisfacă relațiile:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} \geq 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \geq c_j$ (1)	$x_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0 \Leftrightarrow \left(\sum\limits_{i=1}^{m} u_i a_{ij} - c_j\right) x_j = 0$ (1′)	$j = 1,\dots,n$
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \leq 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ (2)	$u_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0 \Leftrightarrow u_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right) = 0$ (2′)	$i = 1,\dots,m$
$x_j \geq 0$	$u_i \geq 0$	$i = 1,\dots,m$ $j = 1,\dots,n$

În mod evident:

- relațiile (2) şi $x_j \geq 0$ arată că x^* trebuie să fie o soluție admisibilă a programului (P);
- relațiile (1) şi $u_i \geq 0$ arată că u^* trebuie să fie o soluție admisibilă a programului dual

$$(Q) \begin{cases} \min \sum\limits_{i=1}^{m} u_i b_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \geq c_j \ , \ j = 1,\dots,n \\ u_i \geq 0 \ , \ i = 1,\dots,m \end{cases}$$

Astfel, pentru programul liniar (P) teorema de optimalitate (6) are următoarea reformulare:

Condiția necesară şi suficientă ca o soluție admisibilă $x^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$ a programului (P) să fie o soluție optimă este să existe o soluție admisibilă $u^* = (u_1^*,\dots,u_m^*)$ a programului dual (Q) astfel încât cuplul (x^*,u^*) să satisfacă relațiile (1′) şi (2′), adică:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} u_i a_{ij} - c_j\right) x_j = 0 \quad j = 1,\dots,n \\ u_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right) = 0 \quad i = 1,\dots,m \end{cases}$$

Am regăsit teorema ecarturilor complementare din programarea liniară.

Modul în care condițiile KKT sunt utilizate în rezolvarea unor programe convexe este ilustrat prin următoarele exemple:

Exemplul 1.Vom considera programul neliniar:

$$(P)\begin{cases}(\max) f = x_1 + 2x_2 - x_2^3 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

Cercetăm dacă (P) este program convex. Pentru aceasta:

1) aducem (P) la forma canonică de prezentare a programelor neliniare:

$$(P)\begin{cases}(\min)\ -f = -x_1 - 2x_2 + x_2^3 \\ x_1 + x_2 - 1 \le 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

2) Funcția obiectiv –*f* este convexă în cadranul nenegativ R_+^2 ca sumă a două funcții de câte o singură variabilă, ambele convexe pe [0,+∞):

$-f = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ unde $f_1(x_1) = -x_1$ este liniară iar $f_2(x_2) = -2x_2 + x_2^3$ are proprietatea $f_2''(x_2) = 6x_2 \ge 0$ pentru $x_2 \ge 0$.

3) Programul are o singură restricție, liniară în variabilele x_1, x_2.

În concluzie, (P) este un program convex căruia I se poate aplica teorema de optimalitate 6.

Atașăm programului (P) – în formă canonică! – lagrangianul:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, u) = -x_1 - 2x_2 + x_2^3 + u(x_1 + x_2 - 1)$$

Scriem condițiile de optimalitate KKT:

$$\textbf{(KKT)}\quad\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} \ge 0 \Leftrightarrow -1 + u \ge 0 & (1.1)\ ; & x_1 \cdot \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow x_1(-1+u) = 0 & (1.1') \\
\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} \ge 0 \Leftrightarrow -2 + 3x_2^2 + u \ge 0 & (1.2)\ ; & x_2 \cdot \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow x_2(-2 + 3x_2^2 + u) = 0 & (1.2') \\
\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} \le 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 \le 1 & (2)\ ; & u \cdot \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u(x_1 + x_2 - 1) = 0 & (2') \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & ; & u \ge 0 &
\end{array}$$

Dacă tripletul de valori numerice (x_1, x_2, u) satisface condițiile mai sus scrise, putem formula următoarele judecăți:

- Din (1.1) rezultă $u > 0$ şi ca urmare (2′) implică: $x_1 + x_2 = 1$ (3)
- Dacă am avea $x_2 = 0$,din (3) ar rezulta $x_1 = 1$ şi mai departe (1.1′) ar implica $u = 1$.
  Din (1.2) s-ar obține $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = -1 < 0$. Contradicție! În concluzie $x_2 > 0$.
- Deoarece $x_2 > 0$ din (1.2′) deducem $-2 + 3x_2^2 + u = 0$ (4)
- Dacă am avea $x_1 = 0$, din (3) ar rezulta $x_2 = 1$ şi din (4) am obține: $u = -1 < 0$ ceeace nu se poate. În consecință, $x_1 > 0$.
- Întrucât $x_1 > 0$,din (1.1′) rezultă $u = 1$. Din (4) găsim $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ şi din (3) obținem $x_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Programul (P) are deci soluția optimă: $x_1^* = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Exemplul 2. Ne vom ocupa acum de programul:

$$(P)\begin{cases} (\max) f = x_1 + 2x_2 \\ x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 \le 21 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Forma canonică de prezentare:

$$(P)\begin{cases} (\min)\ -f = -x_1 - 2x_2 \\ x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 21 \le 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Programul (P) este un program convex deoarece:

Funcția obiectiv este liniară în variabilele x_1, x_2;

Funcția patratică $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$ care defineşte unica restricție a programului este o funcție convexă – chiar strict convexă! – pe R^2. Într-adevăr, g are expresia matricială

$$g(x_1, x_2) = x^T C x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

în care matricea simetrică $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ este pozitiv definită (este bine ca cititorul să revadă notele privitoare la convexitatea funcțiilor patratice din secțiunea 14.1)

Lagrangianul programului: $\mathcal{L}(x_1, x_2, u) = -x_1 - 2x_2 + u(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 21)$

Condițiile de optrimalitate KKT:

$$
\text{(KKT)}\quad
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \geq 0 \Leftrightarrow -1 + 2ux_1 - ux_2 \geq 0 \quad (1.1) & ; & x_1 \cdot \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow x_1(-1 + 2ux_1 - ux_2) = 0 \quad (1.1') \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \geq 0 \Leftrightarrow -2 - ux_1 + 2ux_2 \geq 0 \quad (1.2) & ; & x_2 \cdot \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow x_2(-2 - ux_1 + 2ux_2) = 0 \quad (1.2') \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \leq 0 \Leftrightarrow x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \leq 21 \quad (2) & ; & u \cdot \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 21) = 0 \quad (2') \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & ; & u \geq 0
\end{array}
$$

Dacă tripletul de valori numerice (x_1, x_2, u) satisface condițiile mai sus scrise, putem dezvolta următoarele raționamente:

- Din (1.1) sau (1.2) rezultă că nu putem avea $u = 0$. Prin urmare $u > 0$.
- Deoarece $u > 0$ din $(2')$ rezultă: $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 21$ (3)
- Nu putem avea $x_1 = 0$, pentru că dacă ar fi aşa, am avea $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -1 - ux_2 < 0$ în

contradicție cu (1.1). Deci $x_1 > 0$ şi ca urmare, $(1.1')$ implică: $-1 + 2ux_1 - ux_2 = 0$ (4)

- Analog, din (1.2) rezultă $x_2 > 0$ iar din $(1.2')$ obținem: $-2 - ux_1 + 2ux_2 = 0$ (5)
- Evident, relațiile (3),(4),(5) constituie un sistem în variabilele x_1, x_2 şi u. Din (4) şi (5)

extragem: $x_1 = \dfrac{4}{3u}$, $x_2 = \dfrac{5}{3u}$. Înlocuind în (4) găsim $u = \dfrac{1}{3}$ şi de aici $x_1 = 4$, $x_2 = 5$

Programul (P) are soluția optimă $x_1^* = 4$, $x_2^* = 5$

Exemplul 3. Uneori, se întâmplă să cunoaştem „poziția aproximativă” a soluției optime a unui program convex în sensul că ştim care restricții sau condiții de nenegativitate sunt verificate cu egalitate şi care nu. În asemenea situații, condițiile KKT sunt suficiente pentru determinarea „exactă” a soluției optime căutate.

Vom lua ca exemplu programul neliniar:

$$(P)\begin{cases}(\max) f = 2x_1 + x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \le 1 \\ x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

pentru care vom „încerca” o rezolvare grafică în figura 14.8.(P) este un program convex, deoarece mulțimea $\mathcal{A}$ a soluțiilor sale admisibile este convexă şi funcția obiectiv este liniară.În figură este reprezentată punctat şi o dreaptă de nivel a funcției obiectiv f a cărei translații, în sensul maximizării lui f, conduce la soluția optimă x^* a programului. Din desen rezultă că x^* are următoarele proprietăți:

- satisface cu egalitate restricția neliniară $x_1^2 + x_2^2 \le 1$ şi cu inegalitate strictă restricția liniară $x_1 + 2x_2 \le 2$;
- coordonatele sale sunt nenule.

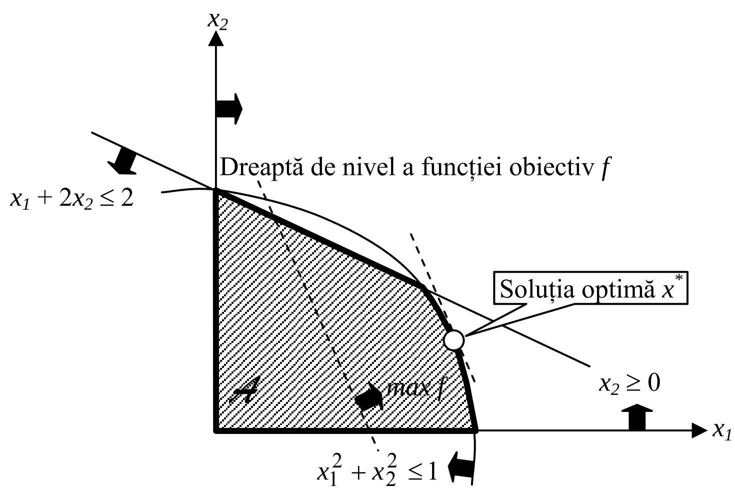


Figura 14.8

Pentru determinarea „precisă” a lui x^* vom folosi condițiile de optimalitate KKT: teoria ne asigură că x^* le satisface!

Forma canonică de prezentare a programului neliniar (P):

$$(P)\begin{cases}(\min) \quad -f = -2x_1 - x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2 \le 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

Lagrangianul asociat:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, u) = -2x_1 - x_2 + u_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + u_2(x_1 + 2x_2 - 2)$$

Condițiile de optimalitate Karush – Kuhn – Tucker:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \geq 0 \Leftrightarrow -2 + 2u_1 x_1 + u_2 \geq 0 \quad (1.1) \quad ; \quad x_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow x_1(-2 + 2u_1 x_1 + u_2) = 0 \quad (1.1')$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \geq 0 \Leftrightarrow -1 + 2u_1 x_2 + 2u_2 \geq 0 \quad (1.2) \quad ; \quad x_2 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow x_2(-1 + 2u_1 x_2 + 2u_2) = 0 \quad (1.2')$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} \leq 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \quad (2.1) \quad ; \quad u_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = 0 \Leftrightarrow u(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \quad (2.1')$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} \leq 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad (2.2) \quad ; \quad u_2 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} = 0 \Leftrightarrow u_2(x_1 + 2x_2 - 2) = 0 \quad (2.2')$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad ; \quad u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$$

Din studiul grafic rezultă că soluția optimă a programului (P) satisface:

- egalitatea $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (3)
- inegalitățile stricte $x_1 > 0, x_2 > 0$ şi $x_1 + 2x_2 > 2$

Din (1.1′) , (1.2′) şi (2.2′) rezultă egalitățile:

$$-2 + 2u_1 x_1 + u_2 = 0 \quad (4)$$

$$-1 + 2u_1 x_2 + 2u_2 = 0 \quad (5)$$

$$u_2 = 0 \quad (6)$$

Relațiile (3) – (6) constituie un sistem în variabilele x_1, x_2, u_1, u_2 din a cărui rezolvare rezultă soluția optimă $x_1^* = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $x_2^* = \frac{1}{\sqrt{5}}$ şi valorile optime ale multiplicatorilor Lagrange $u_1^* = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $u_2^* = 0$

În teoria economică, condițiile KKT permit degajarea unor concluzii calitative importante şi chiar regăsirea unor legități binecunoscute.

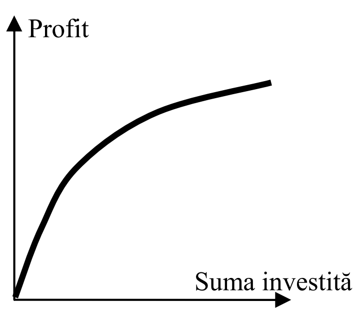


Figura 14.9

Exemplul 4 Un agent economic doreşte să investească o sumă de bani în două afaceri independente, ambele profitabile, obiectivul urmărit fiind maximizarea profitului. Se presupune că profitul ca funcție de suma investită are alura din figura 14.9 adică este o funcție crescătoare şi concavă. **Teoria economică clasică afirmă şi probează că suma trebuie astfel împărțită încât profiturile marginale corespunzătoare să fie egale** (în cazul de față profitul marginal corespunzător unei sume investite este profitul suplimentar care s-ar obține dacă suma creşte cu o unitate monetară).

Problema pusă are următorul model matematic:

$$(P)\begin{cases}(\max) f(x_1,x_2)= f_1(x_1)+ f_2(x_2)\\ \quad x_1+x_2\le I\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

în care;

$x_1, x_2 \equiv$ sumele investite în cele două activități economice;

$I \equiv$ suma totală de investit;

$f_i(x_i) \equiv$ profitul rezultat din investirea sumei x_i în activitatea i , i = 1,2

f (x_1 , x_2) ≡ profitul total (egal cu suma profiturilor individuale deoarece activitățile sunt presupuse a fi independente)

Funcția obiectiv f este concavă în cadranul nenegativ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ ca sumă a două funcții de câte o singură variabilă, concave pe [0, +∞).Unica restricție din (P) este liniară astfel că (P) este un program convex.

Lagrangianul asociat formei canonice de prezentare a programului (P) are expresia:

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,u)=-f_1(x_1)-f_2(x_2)+u(x_1+x_2-I)$$

Vom scrie condițiile de optimalitate KKT:

$$\textbf{(KKT)}\quad\begin{array}{lll} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1}\ge 0 \Leftrightarrow -f_1'(x_1)+u\ge 0 \qquad (1.1)\ ; & x_1\cdot\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1}=0 \Leftrightarrow x_1(-f_1'(x_1)+u)=0 & (1.1')\\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2}\ge 0 \Leftrightarrow -f_2'(x_2)+u\ge 0 \qquad (1.2)\ ; & x_2\cdot\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2}=0 \Leftrightarrow x_2(-f_2'(x_2)+u)=0 & (1.2')\\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\le 0 \Leftrightarrow x_1+x_2\le I \qquad (2)\ ; & u\cdot\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}=0 \Leftrightarrow u(x_1+x_2-I)=0 & (2')\\ \quad x_1\ge 0, x_2\ge 0 \qquad ; & u\ge 0 & \end{array}$$

Agentul doreşte să investească în ambele activități şi ca urmare $x_1 > 0, x_2 > 0$ .Profiturile marginale $f_1'(x_1)$ şi $f_2'(x_2)$ sunt pozitive astfel că din (1.1) sau (1.2) rezultă $u > 0$. Atunci (2′) implică $x_1 + x_2 = I$ iar din (1.1′) şi (1.2′) obținem $f_1'(x_1) = f_2'(x_2) = u$. Regăsim concluzia mai sus subliniată!

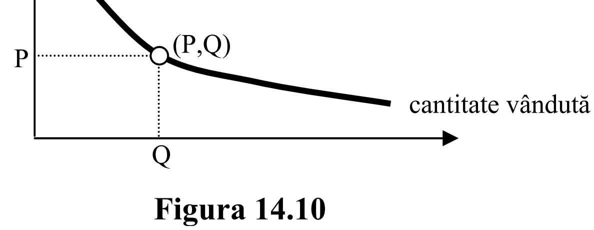


Figura 14.10

Exemplul 5. Să notăm cu Q cantitatea dintr-un anumit bun cerută şi vândută pe piață la prețul P. Cuplul (Q,P) este un punct pe curba cererii bunului considerat, curbă a cărei alură esre vizualizată în figura 14.10 Vom putea presupune că Q este o funcție de P sau că P este o funcție de Q după necesități. Reamintim că **elasticitatea cererii** pentru bunul considerat s-a definit prin raportul.

$$E = -\frac{\textbf{modificarea procentuală a cantității cerute}}{\textbf{modificarea procentuală a prețului}} = -\frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dP}{P}} = -\frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dP}$$

Cererea s- numit **elastică** dacă E > 1 şi **inelastică** dacă E < 1. Vom demonstra următoarea:

Lemă O cerere inelastică implică un venit marginal negativ.

Reamintim că **venitul marginal reprezintă creşterea de venit (pozitivă sau negativă) rezultată din creşterea cantității vândute cu o unitate.** Formal, dacă $R = P \cdot Q$ este venitul (revenue) obținut din vânzarea cantității Q la prețul P atunci venitul marginal (marginal revenue) MR este dat de derivata lui R în raport cu Q:

$$MR = \frac{d(P\cdot Q)}{dQ}$$

Demonstrația lemei: Avem succesiv:

$$MR = \frac{P\cdot dQ + Q\cdot dP}{dQ} = P + Q\cdot\frac{dP}{dQ} = P\cdot\left(1+\frac{Q}{P}\cdot\frac{dP}{dQ}\right) = P\cdot\left(1-\frac{1}{E}\right)$$

de unde se vede că $E < 1 \Rightarrow MR < 0$

Să considerăm o întreprindere care produce două bunuri notate 1 şi 2. Fie Q_1 şi Q_2 cantitățile vândute pe piață la prețurile $P_1(Q_1)$ respectiv $P_2(Q_2)$. Fie $C(Q_1,Q_2)$ costul producerii celor două cantități. De obicei, în analiza economică se presupune că funcția $C(Q_1,Q_2)$ este crescătoare în ambele argumente şi convexă în domeniul $Q_1 \geq 0$, $Q_2 \geq 0$.

Propoziție Dacă întreprinderea urmăreşte maximizarea profitului său şi unul dintre bunuri are cererea inelastică, ea nu trebuie să producă bunul respectiv sau, dacă situația o cere, să producă atât cât îi este impus.

Demonstrație: Problema constă în maximizarea profitului:

$$\Pi = P_1\cdot Q_1 + P_2\cdot Q_2 - C(Q_1,Q_2)$$

cu condiția producerii cantităților minimale:

$$Q_1 \geq m_1 > 0 \qquad Q_2 \geq m_2 > 0$$

Rescriem prolema în forma canonică:

$$\begin{cases} (\min) \quad -\Pi = -P_1 \cdot Q_1 - P_2 \cdot Q_2 + C(Q_1, Q_2) \\ \quad m_1 - Q_1 \le 0 \\ \quad m_2 - Q_2 \le 0 \\ \quad Q_1, Q_2 \ge 0 \end{cases}$$

şi ataşăm lagrangianul:

$$\mathcal{L}(Q_1, Q_2; u_1, u_2) = -P_1 \cdot Q_1 - P_2 \cdot Q_2 + C(Q_1, Q_2) + u_1(m_1 - Q_1) + u_2(m_2 - Q_2)$$

Programul este convex şi ca urmare condițiile KKT sunt aplicabile:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1} \ge 0\,,\; Q_1 \cdot \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1} = 0 & ; & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_2} \ge 0\,, Q_2 \cdot \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} \le 0\,, u_1 \cdot \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = 0 & ; & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} \le 0\,, u_2 \cdot \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} = 0 \\ Q_1, Q_2 \ge 0 & & u_1, u_2 \ge 0 \end{array}$$

Să presupunem că bunul 1, produs în cantitatea Q_1 are cerea inelastică. Dintre condițiile KKT de mai sus considerăm numai pe acelea care se referă la variabila Q_1.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial (P_1 \cdot Q_1)}{\partial Q_1} + \frac{\partial C}{\partial Q_1} - u_1 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad -MR_1 + MC_1 - u_1 \ge 0 \tag{1}$$

unde

$$MR_1 = \frac{\partial (P_1 \cdot Q_1)}{\partial Q_1} \equiv \text{venitul marginal rezultat din vânzarea bunului1;}$$

$$MC_1 = \frac{\partial C}{\partial Q_1} \equiv \text{costul marginal al producerii bunului 1.}$$

$$Q_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_1 \cdot \big(-MR_1 + MC_1 - u_1) = 0\big) \tag{1'}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} \le 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 - Q_1 \le 0 \tag{2}$$

$$u_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1(m_1 - Q_1) = 0 \tag{2'}$$

Deoarece la optim $Q_1 \ge m_1 > 0$ din (1′) rezultă:

$$-MR_1 + MC_1 - u_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = MC_1 - MR_1$$

Produsul 1 are cererea inelastică şi conform lemei $\mathrm{MR}_1 < 0$. Cum $\mathrm{MC}_1 > 0$ urmează că la optim $u_1 > 0$. Atunci din (2′) rezultă $Q_1 = m_1$. Deci, din bunul 1 cu cererea inelastică nu se produce mai mult decât cantitatea minimă impusă.

14.5 Programe patratice convexe

Printre cele mai simple probleme de optimizare neliniară, dar şi cele mai uzitate modele în analiza economică, se numără problemele de programare patratică, caracterizate prin aceea că restricțiile sunt liniare iar funcția obiectiv este un polinom de gradul doi în variabilele problemei.

Problemele de programare patratică vor fi studiate în următoarea formă canonică:

(P) Să se determine $x^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*)$ care minimizează valoarea funcției obiectiv:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \sum_{1\le i\le i\le j\le n} p_{ij} x_i x_j$$

cu satisfacerea restricțiilor:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,\ldots,m$$

şi a condițiilor de nenegativitate:

$$x_j \ge 0 \quad j = 1,\ldots,n$$

Cu notațiile matriciale:

$$p = [p_1,\ldots,p_n] \quad ; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \text{ unde } \begin{cases} c_{ii} = 2p_{ii} & i = 1,\ldots,n \\ c_{ij} = c_{ji} = p_{ij} & 1 \le i < j \le n \end{cases}$$

(P) se rescrie condensat:

$$(P)\begin{cases}(\min) f(x) = px + \frac{1}{2}x^T Cx \\ Ax \le b \\ x \ge 0\end{cases}$$

În continuare vom avea în vedere numai programe patratice convexe. Conform definițiilor generale (secțiunea 14.1, exemple de funcții convexe) (P) este un program convex dacă şi numai dacă funcția obiectiv $f(x) = px + \frac{1}{2}x^T Cx$ este o funcție convexă pe R^n ceeace revine la a spune că matricea simetrică C este pozitiv semidefinită.

Importanța programării patratice convexe este motivată prin:

- faptul că modelează cu suficientă acuratețe multe situații practice mai cu seamă de natură economică;

- ca şi programele liniare, programele patratice convexe sunt solvabile într-un număr finit de paşi prin metode derivate din metoda simplex.

Programarea patratică în exemple

Exemplul 1. Reluăm problema determinării programului de activitate într-un sistem de producție în care un număr de resurse disponibile în cantități limitate sunt transformate în bunuri, obiectivul fiind maximizarea venitului rezultat din vânzarea produselor rezultate:

$$\begin{cases}(\max) f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,\dots,m \\ x_j \ge 0 \quad j = 1,\dots,n\end{cases} \tag{1}$$

în care:

$x_1,\dots,x_n$ reprezintă cantitățile de bunuri ce urmează a fi produse din resursele disponibile;

$b_1,\dots,b_m$ reprezintă cantitățile de resurse disponibile;

a_{ij} $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$ sunt consumurile unitare;

$c_1,\dots,c_n$ sunt prețurile cu care sunt vândute bunurile produse.

În multe situații practice, prețurile c_j pot fi considerate constante. Nu întotdeauna însă ceea ce se produce se poate şi vinde la un anumit preț. În acord cu teoria economică, cantitatea de marfă vândută se află într-o relație inversă cu prețul cerut. Am putea exprima această dependență prin relația liniară

$$c_j = \alpha_j - \beta_j x_j \quad \text{cu} \quad \alpha_j > 0, \beta_j > 0 \quad j = 1,\ldots,n \tag{2}$$

Desigur, şi această relaţie este o aproximare a situaţiei reale însă de multe ori această aproximare este mai bună decât cea rezultată din ipoteza unor preţuri constante.
Înlocuind c_j din (2) în funcţia obiectiv f obţinem:

$$f = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j x_j) x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j - \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j^2$$

Astfel, programul (1) se transformă într-un program patratic cu funcţia obiectiv convexă:

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j^2 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \to \min$$

Exemplul 2. Un agent doreşte să investească suma Q în n fonduri de investiţii prin cumpărarea de acţiuni. Fie x_j numărul acţiunilor de tipul j ce urmează a fi cumpărate la preţul p_j, astfel că:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le Q$$
$$x_j \ge 0 \quad j = 1,\ldots,n$$

În general, venitul rezultat dintr-un plasament în fondul de investiţii j este o variabilă aleatoare cu media m_j şi dispersia $\sigma_{jj} \quad j = 1,\ldots,n$. După cum este cunoscut, dispersia σ_{jj} este o măsură a riscului ca venitul obţinut să difere de valoarea medie. Un fond j cu dispersia σ_{jj} mare poate fi socotit „riscant" existând posibilitatea unor fluctuaţii mari faţă de valoarea medie.
Pentru două tipuri diferite de plasament $i \neq j$ fie σ_{ij} covarianţa veniturilor rezultate din acestea; σ_{ij} este un indicator al corelaţiei acestor venituri: o covarianţă pozitivă semnifică faptul că veniturile cresc sau descresc împreună.
Mediile m_j şi dispersiile σ_{jj} se calculează cu mijloacele specifice statisticii matematice. Celelalte elemente ale matricii de covarianţă $\lfloor \sigma_{ij} \rfloor$ sunt mai greu de estimat şi abordarea uzuală presupune postularea unor ipoteze privind comportamentul pieţei bursiere, ipoteze care permit deducerea valorilor σ_{ij} din dispersiile σ_{ii} şi σ_{jj}.
Cu aceste pregătiri, venitul total rezultat din plasamentele $x_1,\ldots,x_n$ are valoarea medie:

$$E(x) = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j$$

şi dispersia

$$V(x)=\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j$$

V(x) este o măsură a riscului asociat vectorului de decizie $x=(x_1,\ldots,x_n)$.

Problema agentului constă în alegerea unui „vector de plasamente” $x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ care, pe de o parte să crească cât mai mult valoarea medie a venitului rezultat din plasamente, iar pe de altă parte să micşoreze riscul inerent. Formal, cele două obiective pot fi combinate în funcția:

$$\alpha E(x)-\beta V(x)\to \max \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x)=\beta V(x)-\alpha E(x)\to \min$$

în care α şi β sunt constante nenegative ce reflectă atitudinea agentului față de risc; se poate presupune că α + β = 1.

Astfel, combinația α = 1 , β = 0 exprimă atitudinea unui investitor lipsit de teamă în fața riscului, preocupat doar de maximizarea venitului mediu.

Din contră, combinația α = 0 , β = 1 formalizează atitudinea unui investitor excesiv de prudent, interesat în obținerea unui venit cât mai constant, scutit de fluctuații, venit care poate avea însă o valoare medie mică...

În concluzie, problema determinării portofoliului de investiții este modelată de programul patratic:

$$\begin{cases}(\min) f(x)=\beta\sum\limits_{i,j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j-\alpha\sum\limits_{j=1}^{n}m_j x_j\\ \sum\limits_{j=1}^{n}p_j x_j\le Q\\ x_j\ge 0 \quad j=1,\ldots,n\end{cases}$$

Programul rezultat este convex întrucât se ştie că matricea de covarianță $\lfloor\sigma_{ij}\rfloor$ este pzitiv semidefinită.

Condițiile de optimalitate Karush – Kuhn – Tucker în programarea patratică convexă

Fixăm programul patratic cu *m* restricții şi *n* variabile, în formă canonică:

$$(P)\begin{cases}(\min) f(x)=px+\frac{1}{2}x^T Cx\\ Ax\le b\\ x\ge 0\end{cases}$$

cu notațiile matriciale introduse în secțiunea precedentă. Presupunem că matricea simetrică C este pozitiv semidefinită; funcția obiectiv *f* este atunci convexă şi întreg (P) este un program convex.

Asociem sistemului celor *m* restricții liniare $Ax\le b$ vectorul linie $u=[u_1,\ldots,u_m]$ al multiplicatorilor Lagrange şi construim lagrangianul programului (P):

$$\mathcal{L}(x,u) = px + \frac{1}{2}x^T Cx + u(Ax - b)$$

În scriere matricială, condițiile de optimalitate KKT pentru programul (P) arată astfel:

$\nabla_x \mathcal{L} \geq 0 \Leftrightarrow p + x^T C + uA \geq 0 \quad (1)$	$\langle \nabla_x \mathcal{L}, x \rangle = 0 \Leftrightarrow (p + x^T c + uA)x = 0 \quad (1')$
$\nabla_u \mathcal{L} \leq 0 \Leftrightarrow Ax - b \leq 0 \quad (2)$	$\langle u, \nabla_u \mathcal{L} \rangle = 0 \Leftrightarrow u(Ax - b) = 0 \quad (2')$
$x \geq 0$	$u \geq 0$

Transformăm inegalitățile (1) și (2) în egalități introducând vectorii de variabile de abatere:

$$v = [v_1, \ldots, v_n] \underset{\text{def}}{=} p + x^T C + uA \geq 0 \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \underset{\text{def}}{=} b - Ax \geq 0$$

Rezultă relațiile:

$$x^T C + uA - v = -p \quad \text{şi} \quad Ax + y = b$$

Mai departe:

$$(1') \Leftrightarrow vx = 0 \Leftrightarrow v_j x_j = 0 \quad j = 1, \ldots, n \text{ deoarece } v_j \geq 0\,,\, x_j \geq 0$$

$$(2') \Leftrightarrow uy = 0 \Leftrightarrow u_i y_i = 0 \quad i = 1, \ldots, m \text{ deoarece } u_i \geq 0\,,\, y_i \geq 0$$

Cu aceste pregătiri, avem următoarea interpretare a condițiilor KKT:

Teoremă Condiția necesară şi suficientă pentru ca $x^* \in R^n$ să fie o soluție optimă a programului patratic convex (P) este să existe $u^* \in R^m$, $v^* \in R^n$, $y^* \in R^m$ astfel încât (x^*, u^*, v^*, y^*) să verifice relațiile:

$$\begin{cases} x^T C + uA - v & = -p \\ Ax & + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_k c_{kj} + \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} - v_j & = -p_j \quad j = 1, \ldots, n \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k & + y_i = b_i \quad i = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{3}$$

$$x \geq 0, u \geq 0, v \geq 0, y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_j \geq 0, u_i \geq 0, v_j \geq 0, y_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m\,;\; j = 1, \ldots, n \tag{4}$$

$$vx = 0 \quad ; \quad uy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_j x_j = 0 \quad j = 1, \ldots, n \;;\; u_i y_i = 0 \quad i = 1, \ldots, m \tag{5}$$

Se observă că (3) este un sistem **liniar** cu $m + n$ ecuaţii şi $2m + 2n$ variabile.

În baza teoremei, rezolvarea programului patratic convex (P) s-a redus la determinarea unei soluţii a sistemului liniar (3) care:

- **să fie admisibilă, adică să verifice condiţiile de nenegativitate (4);**
- **să verifice „relaţiile de complementaritate" (5).**

În principiu, aceasta se poate face cu ajutorul algoritmului simplex în felul următor:

- Se introduc vectorii de variabile **artificiale**:

$$z^1 = \left[z_1^1, \ldots, z_n^1\right] \geq 0 \quad \text{cu} \quad z_j^1 = 0 \;\; \text{dacă} \;\; p_j \geq 0 \;;\;\; z^2 = \begin{bmatrix} z_1^2 \\ \vdots \\ z_m^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{cu} \quad z_i^2 = 0 \;\; \text{dacă} \;\; b_i \geq 0$$

- Se rezolvă programul liniar:

$$\begin{cases} (\min) w = \sum\limits_{j=1}^{n} z_j^1 + \sum\limits_{i=1}^{m} z_i^2 \\ x^T C + uA - v \quad + z^1 \quad = -p \\ Ax \qquad\qquad + y \quad - z^2 = b \\ x \geq 0, u \geq 0, v \geq 0, y \geq 0, z^1 \geq 0, z^2 \geq 0 \end{cases}$$

folosind algoritmul simplex, modificat cu următoarea regulă suplimentară care se referă la criteriul de intrare în bază:

(*) la fiecare iteraţie, noua variabilă bazică va fi astfel aleasă încât:

- **pentru orice $j = 1, \ldots, n$ variabilele v_j şi x_j să nu fie simultan bazice;**
- **pentru fiecare $i = 1, \ldots, m$ variabilele u_i şi y_i să nu fie simultan bazice.**

Această regulă ne asigură că la fiecare iteraţie, în soluţia curentă:

sau $v_j = 0$ sau $x_j = 0$ deci $v_j x_j = 0 \quad j = 1, \ldots, n$

sau $u_i = 0$ sau $y_i = 0$ deci $u_i y_i = 0 \quad i = 1, \ldots, m$

altfel spus, tot timpul relaţiile de complementaritate (5) sunt îndeplinite.

La start se va pleca cu soluția:

$$x = 0 \quad , \quad u = 0$$

$$v_j = \begin{cases} p_j & \text{dacă } p_j \geq 0 \\ 0 & \text{dacă } p_j < 0 \Rightarrow z_j^1 = -p_j \end{cases} \qquad\qquad y_i = \begin{cases} b_i \geq 0 & \text{dacă } b_i \geq 0 \\ 0 & \text{dacă } b_i < 0 \Rightarrow z_i^2 = -b_i \end{cases}$$

care verifică (5) întrucât $x = 0$ şi $u = 0$.

Se poate arăta că dacă (P) este un program compatibil atunci într-un număr finit de iterații se ajunge la o soluție în care $(\min)w = 0$ $\Leftrightarrow$ toate variabilele artificiale introduse au valoarea zero.Este clar atuci că s-a obținut o soluție a sistemului (3) care satisface condițiile de nenegativitate (4) şi relațiile de complementaritate (5). Componenta x^* a acestei soluții este soluția optimă a programului patratic (P).

Observație: Considerațiile de mai sus constituie o descriere de principiu a algoritmului lui Wolfe pentru rezolvarea programelor patratice convexe.

Exemplul 3. Vom considera programul patratic:

$$(P) \begin{cases} (\min) f(x_1, x_2) = -2x_1 - 5x_2 + x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \\ \qquad x_1 + x_2 \leq 2 \\ \quad x_1 \geq 0 \, , \, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ne propunem:

i) să arătăm că funcția obiectiv este strict convexă,

ii) să determinăm minimul liber ($\Leftrightarrow$ nerestricționat) al funcției *f*;

iii) să determinăm soluția optimă a programului cu ajutorul algoritmului lui Wolfe, descris mai sus.

Soluție: i) Aducem *f* la forma matricială $f(x) = px + \frac{1}{2}x^T Cx$:

$$p = [-2\,, -5] \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad f = [-2\,, -5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x_1\,, x_2]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Deoarece

$c_{11} = 2 > 0$ şi $\begin{vmatrix} 2 & =1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \det C = 3 > 0$ $\Rightarrow$ matricea C este pozitiv definită astfel că *f* este o funcție strict convexă pe R^2 ; în particular (P) este un program convex.

ii) Ştim că pentru funcțiile convexe şi diferențiabile în întreg spațiul, punctele de minim coincid cu soluțiile ecuației $\nabla f(x) = 0$ (vezi secțiunea 14.1, caracterizarea diferențială a funcțiilor convexe, teorema 4).

În cazul de față:

$$\nabla f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+2x_1-x_2=0 \\ -5-x_1+2x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-x_2=2 \\ -x_1+2x_2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \hat{x}_1=3 \\ \hat{x}_2=4 \end{matrix}$$

$\min f = f(\hat{x})=-13$

Notăm că punctul de minim liber $\hat{x}=(3,4)$ nu satisface restricția programului (P).

iii) Programul (P) este în formă canonică; asociem unicei restricții din (P) multiplicatorul u şi construim lagrangianul:

$$\mathcal{L}(x\ \ ,x_2,u)=-2x_1-5x_2+x_1^2-x_1x_2+x_2^2+u(x_1+x_2-2)$$

Vom scrie condițiile KKT cu notațiile din expunerea teoretică:

$$\begin{cases} v_1=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1}=-2+2x_1-x_2+u\geq 0 & ; \quad x_1\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1}=0\Leftrightarrow v_1x_1=0 \\ v_2=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2}=-5-x_1+2x_2+u\geq 0 & ; \quad x_2\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2}=0\Leftrightarrow v_2x_2=0 \\ -y=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}=x_1+x_2-2\leq 0 & ; \quad u\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}=0 \Leftrightarrow uy=0 \\ x_1\geq 0\ ,\ x_2\geq 0 & \qquad u\geq 0 \end{cases}$$

Rezolvarea programului patratic convex (P) se reduce la determinarea unei soluții a sistemului liniar:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+u-v_1 & =2 \\ -x_1+2x_2+u \quad -v_2 & =5 \\ x_1+x_2 \qquad\qquad +y & =2 \end{cases}$$

cu toate componentele nenegative:

$$x_1\geq 0\ ,\ x_2\geq 0\ ,\ u\geq 0\ ,\ v_1\geq 0\ ,\ v_2\geq 0\ ,\ y\geq 0$$

şi care verifică relațiile de complementaritate:

$$v_1x_1=0 \quad v_2x_2=0 \quad uy=0$$

Pentru aceasta se va rezolva programul liniar:

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 + u - v_1 + z_1 = 2 \\
-x_1 + 2x_2 + u - v_2 + z_2 = 5 \\
x_1 + x_2 + y = 2 \\
x_1, x_2 \geq 0; u \geq 0; v_1, v_2 \geq 0; y \geq 0; z_1, z_2 \geq 0 \\
(\min) w = z_1 + z_2
\end{cases}
$$

cu algoritmul simplex,având grijă ca la fiecare iterație variabilele:

$$v_1 \text{ şi } x_1 \quad ; \quad v_2 \text{ şi } x_2 \quad ; \quad u \text{ şi } y$$

să nu fie simultan bazice (tabelele 14.)

									1	1
CB	VB	VVB	x_1	x_2	u	v_1	v_2	y	z_1	z_2
1	z_1	2	$\boxed{2}$	-1	1	-1	0	0	1	0
1	z_2	5	-1	2	1	0	-1	0	0	1
0	y	2	1	1	0	0	0	1	0	0
	w	7	1	1	2	-1	-1	*	*	*
0	x_1	1	1	-1/2	1/2	-1/2	0	0	1/2	0
1	z_2	6	0	3/2	3/2	-1/2	-1	0	1/2	1
0	y	1	0	$\boxed{3/2}$	-1/2	1/2	0	1	-1/2	0
	w	6	*	3/2	3/2	-1/2	-1	*	-1/2	*
0	x_1	4/3	1	0	1/3	-1/3	0	1/3	1/3	0
1	z_2	5	0	0	$\boxed{2}$	-1	-1	-1	1	1
0	x_2	2/3	0	1	-1/3	1/3	0	2/3	-1/3	0
	w	5	*	*	2	-1	-1	-1	0	*
0	x_1	1/2								
0	u	5/2								
0	x_2	3/2								
	w	0								

Tabelele 14.1 -14.4

Soluția de start $x_1 = x_2 = 0; u = 0; v_1 = v_2 = 0;$ $y = 2; z_1 = 2 \;\; z_2 = 5$ satisface condițiile de complementaritate (5).

Iterația 1 Variabila u nu poate deveni variabilă bazică deoarece y este deja! Intră x_1 şi iese z_1.

Iterația 2 Din nou u nu poate deveni variabilă bazică. Intră x_2 şi iese y.

Iterația 3 Abia acum u poate deveni variabilă bazică deoarece y este nebazică! Va ieşi z_2 .

Iterația 4 Deoarece $w = 0$, cu siguranță soluția curentă este optimă şi nu mai este necesară completarea tabelului simplex!

Soluția optimă a programului dat este $x_1^* = \frac{1}{2}$, $x_2^* = \frac{3}{2}$. Multiplicatorul Lagrange optimal: $u^* = \frac{5}{2}$.

Probleme propuse

Fie $v^1, v^2, \ldots, v^p$ vectori din spațiul R^n. Reamintim că vectorul $x \in R^n$ este o **combinație liniară** a vectorilor $v^1, v^2, \ldots, v^p$ dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ astfel încât:

$$x = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_p v^p$$

În analiza convexă se utilizează frecvent unele combinații liniare „mai speciale”.Astfel, combinația $x = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_p v^p$ se numeşte:

- **afină** dacă $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = 1$;
- **conică** dacă $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \ldots, \alpha_p \geq 0$;
- **convexă** dacă $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = 1$ şi $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \ldots, \alpha_p \geq 0$.

1. Probați că:

- o conbinație afină a doi vectori *x* şi *y* se poate scrie în forma $z = (1-\alpha)x + \alpha y$ cu $\alpha \in R$;
- o conbinație convexă a doi vectori *x* şi *y* se poate scrie în forma $z = (1-\alpha)x + \alpha y$ cu $0 \leq \alpha \leq 1$.

Fie $x \neq y$ două puncte (sau doi vectori) din „planul” R^2. Din geometria analitică elementară se ştie că:

- mulțimea combinațiilor **afine** ale vectorilor x, y coincide cu **dreapta** care trece prin punctele x, y - vezi figura 14.11a);
- mulțimea combinațiilor **convexe** ale vectorilor x, y coincide cu **segmentul** cu extremitățile x, y - vezi figura 14.11b);

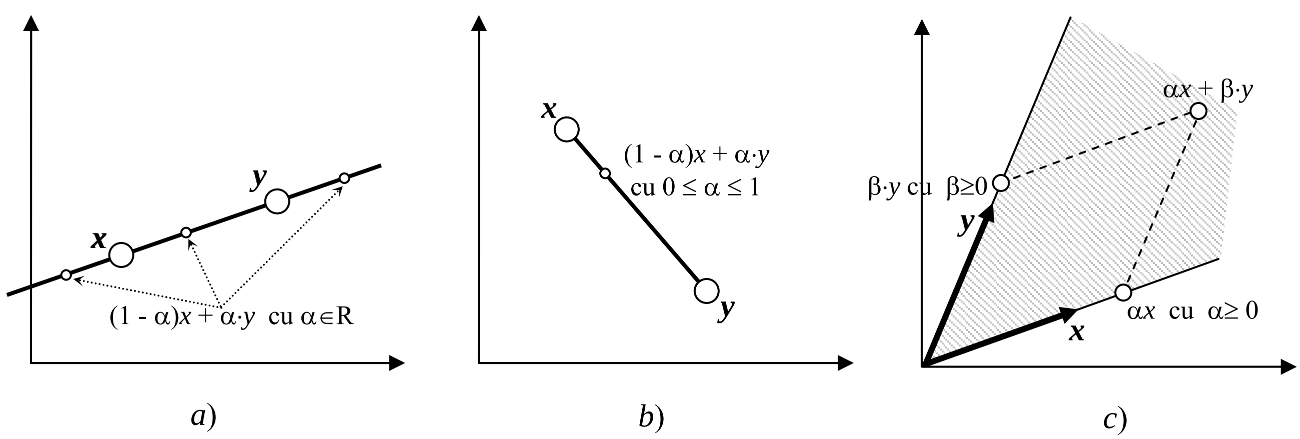


Figura 14.11

- mulțimea combinațiilor **conice** ale vectorilor x, y este **conul** determinat de semidreptele determinate de vectorii x, y. Într-adevăr - vezi figura 14.11c) – fiecare multiplu nenegativ al vectorului *x* este un punct pe semidreapta determinată de *x*. Analog, βy cu $\beta \geq 0$ este un punct pe semidreapta determinată de y. Compunerea vectorilor αx şi βy după „paralelogramul forţelor" arată că suportul sumei $\alpha x + \beta y$ se află între semidreptele determinate de vectorii x, y.

2. În planul R^2 se dau vectorii $x^1 = (3,1)$ şi $x^2 = (-1,2)$. Să se vizualizeze următoarele mulţimi:

$$A = \left\{x \in R^2 \;\middle|\; x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \text{ cu } \alpha_1, \alpha_2 \in R\right\}$$

$$B = \left\{x \in R^2 \;\middle|\; x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \text{ cu } \alpha_1 + \alpha_2 = 1\right\}$$

$$C = \left\{x \in R^2 \;\middle|\; x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \text{ cu } \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0\right\}$$

$$D = \left\{x \in R^2 \;\middle|\; x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \text{ cu } \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \text{ şi } \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0\right\}$$

Soluţie: (cititorul este îndemnat să-şi „reevalueze" cunoştinţele de algebră liniară...) Vectorii x^1, x^2 având suporturile diferite sunt liniar independenţi şi ca urmare formează o bază a spaţiului R^2. Aceasta înseamnă că orice vector din R^2 se scrie – în mod unic – ca o combinaţie liniară a vectorilor x^1 şi x^2. În consecinţă A = R^2.Consideraţiile precedente conduc la reprezentările din figura 14.12.

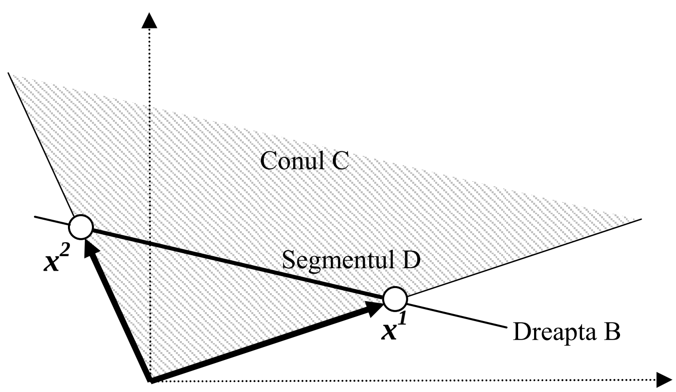


Figura 14.12

3. În planul R^2 se dau vectorii $v^1 = (1,1), v^2 = (3,2), v^3 = (2,4)$. Fie T mulţimea combinaţiilor convexe ale celor trei vectori.

i) Exprimaţi un punct oarecare din T printr-o combinaţie convexă a doi vectori;

ii) Aplicaţi schema găsită combinaţiilor $a = \frac{1}{4}v^1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^3$ şi $g = \frac{1}{3}v^1 + \frac{1}{3}v^2 + \frac{1}{3}v^3$

iii) Folosind rezultatele de mai sus vizualizaţi mulţimea T.

Soluţie: i) Fie $x = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3$ cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ şi $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0$.

- dacă $\alpha_1 = 1$ atunci $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ şi $x \equiv v^1$;

- dacă $\alpha_1 = 0$ atunci $x = \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3$ cu $\alpha_2 + \alpha_3 = 1$ şi $\alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0$ de unde rezultă că x este un punct pe segmentul $\left[v^2, v^3\right]$;

- să presupunem acum că $0 < \alpha_1 < 1$. Putem scrie:

$$x = \alpha_1 v^1 + (1-\alpha_1) \cdot \left[\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1} v^2 + \frac{\alpha_3}{1-\alpha_1} v^3\right] = \alpha_1 v^1 + (1-\alpha_1) y$$

unde

$$y = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1} v^2 + \frac{\alpha_3}{1-\alpha_1} v^3$$

Se verifică uşor că y este o combinaţie convexă a vectorilor v^2 şi v^3 adică este un punct pe segmentul $\left[v^2, v^3\right]$.

Apoi, $x = \alpha_1 v^1 + (1-\alpha_1) y$ arată că x este o combinaţie convexă a vectorilor v^1 şi y ,deci un punct pe segmentul cu extremităţile v^1 şi y – vezi figura 14.12

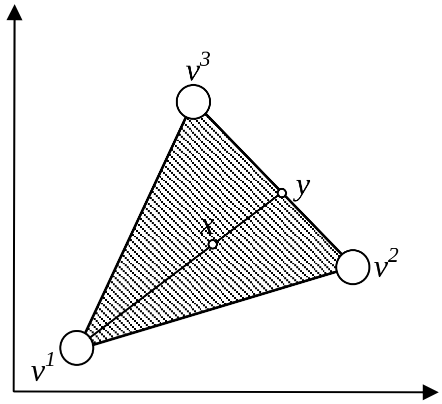


Figura 14.12

ii) Ca mai sus:

$$a = \frac{1}{4} v^1 + \frac{3}{4} y \;\text{ cu }\; y = \frac{1/2}{1 - 1/4} v^2 + \frac{1/4}{1 - 1/4} v^3 = \frac{2}{3} v^2 + \frac{1}{3} v^3$$

„Împărţind" segmentul $\left[v^2, v^3\right]$ în trei părţi egale, y se află la 1/3 de extremitatea v^2 şi 2/3 de cealaltă extremitate v^3. Analog, a se află la 3/4 de v^1 şi la 1/4 de y pe segmentul $\left[v^1, y\right]$ .Coordonatele punctului a sunt : $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9/4\\9/4\end{bmatrix}$.

Analog: $g = \frac{1}{3} v^1 + \frac{2}{3} y$ cu $y = \frac{1/3}{1 - 1/3} v^2 + \frac{1/3}{1 - 1/3} v^3 = \frac{2}{3} v^2 + \frac{1}{3} v^3 = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} v^3$

Conchidem că y este mijlocul segmentului $\left[v^2, v^3\right]$ de unde rezultă că segmentul $\left[v^1, y\right]$ este mediană în tringhiul cu vârfurile v^1 , v^2 şi v^3. Punctul g se află pe segmentul $\left[v^1, y\right]$ la 2/3 de v^1 şi 1/3 de y şi ca urmare coincide cu centrul de greutate al triunghiului.

iii) din cele de mai sus rezultă că mulţimea T a combinaţiilor convexe ale vectorilor v^1 , v^2 , v^3 se compune din toate punctele situate în interiorul sau pe laturile triunghiului cu vârfurile v^1 , v^2, v^3.

Conceptul geometric de dreaptă poate fi extins la un spaţiu oarecare R^n în două moduri:

- fie $x \neq y$ două puncte din R^n. Numim „**dreaptă care trece prin punctele (diferite) *x* , *y***" mulţimea tuturor combinaţiilor afine ale punctelor x şi y. Notaţie:

$$D(x,y) = \left\{ z \in R^n \mid z = (1-\alpha)x + \alpha y, \alpha \in R \right\}$$

- fie x^0 un punct oarecare din R^n şi $r \in$R^n un vector nenul. Mulţimea:

$$d(x^0, r) = \left\{ z \in R^n \;\middle|\; z = x^0 + \alpha \cdot r, \alpha \in R \right\}$$

se va numi „**dreaptă care trece prin punctul x^0 şi are direcţia r**"

4. Să se arate că cele două concepte de „dreaptă" introduse mai sus, coincid.
Indicaţie: dacă dreapta s-a dat prin două puncte $x \neq y$, ea coincide cu dreapta care trece prin x şi are direcţia $r = y - x \neq 0$. Reciproc, dacă dreapta s-a dat printr-un punct x^0 şi direcţia r, ea coincide cu dreapta care trece prin punctele distincte x^0 şi $x^0 + r$.

Fie $A \subseteq R^n$ o mulţime oarecare nu neapărat convexă. Există mulţimi convexe care conţin mulţimea A, ca de exemplu, întreg spaţiul R^n. Intersecţia tuturor acestor mulţimi este o mulţime convexă care conţine pe A şi mai precis este cea mai mică mulţime convexă care conţine mulţimea A. Ea se numeşte **acoperirea convexă** a mulţimii A şi se notează Conv(A) – vezi figura 14.13

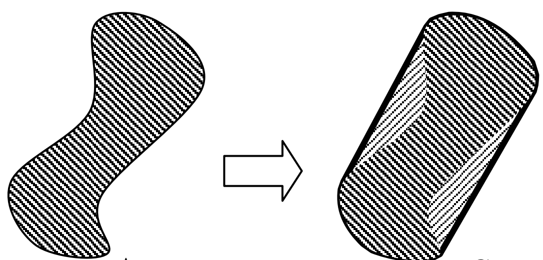


Figura 14.13

5. Fie $A \subseteq R^n$ o mulţime oarecare.

i) Să se arate că dacă x şi y din R^n sunt combinaţii convexe de puncte din A atunci orice punct de pe segmentul $[x, y]$este o combinaţie convexă de puncte din A. Să se deducă de aici că mulţimea A′ a tuturor combinaţiilor convexe de puncte din A este o mulţime convexă care conţine pe A.

ii) Să se arate că o mulţime este convexă dacă şi numai dacă o dată cu două puncte conţine şi orice combinaţie convexă a acestora.

iii) Folosind i) şi ii) să se arate că A′ = Conv(A) adică **acoperirea convexă a unei mulţimi A se compune din toate combinaţiile convexe de punte din A.**

Soluţie: Fie

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i' x^i \text{ cu } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i' = 1 \text{ şi } \alpha_i' \geq 0 \qquad\qquad y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j' y^j \text{ cu } \sum_{i=1}^{m} \beta_j' = 1 \text{ şi } \beta_j' \geq 0$$

două combinaţii convexe ale unor puncte $x^1, \ldots, x^m$ respectiv $y^1, \ldots, y^n$ din A. Fie $0 \leq \lambda \leq 1$. Avem de arătat că $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ este o combinaţie convexă a unor puncte din A. Fie $z^1, \ldots, z^p$ punctele rezultate din reuniunea colecţiilor $\{x^1, \ldots, x^m\}$ şi $\{y^1, \ldots, y^n\}$. Observând că într-o combinaţie convexă a unor puncte putem introduce şi alte puncte **cu coeficientul zero** rezultă că x şi y pot fi considerate combinații convexe ale aceleiaşi colecții de puncte $z^1,\dots,z^p$:

$$x=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i z^i \text{ cu } \sum_{i=1}^{p}\alpha_i=1 \text{ şi } \alpha_i\ge 0 \qquad\qquad y=\sum_{i=1}^{p}\beta_i z^i \text{ cu } \sum_{i=1}^{p}\beta_i=1 \text{ şi } \beta_i\ge 0$$

Atunci:

$$z=(1-\lambda)x+\lambda y=\sum_{i=1}^{p}\left[(1-\lambda)\alpha_i+\lambda\beta_i\right]z^i=\sum_{i=1}^{p}\gamma_i z^i \text{ cu } \gamma_i=(1-\lambda)\alpha_i+\lambda\beta_i$$

Deoarece:

$$\gamma_i=(1-\lambda)\alpha_i+\lambda\beta_i\ge 0 \quad i=1,\dots,p \text{ şi } \sum_{i=1}^{p}\gamma_i=(1-\lambda)\sum_{i=1}^{p}\alpha_i+\lambda\sum_{i=1}^{p}\beta_i=1-\lambda+\lambda=1$$

combinația $z=\sum_{i=1}^{p}\gamma_i z^i$ este într-adevăr o combinație convexă de puncte din A.

ii) Fie $C\subseteq R^n$ o mulțime oarecare.

$\Rightarrow$ presupunem că C este o mulțime convexă în sensul definiției date în secțiunea 14.1 Fie

$$x=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x^i \text{ cu } \sum_{i=1}^{p}\alpha_i=1 \text{ şi } \alpha_i\ge 0 \quad i=1,\dots,p$$

O combinație convexă a *p* puncte din C. Avem de arătat că $x\in C$.

Dacă *p* = 1 atunci $\alpha_1=1$ şi $x\equiv x^1\in C$;

Dacă *p* = 2 atunci $x=\alpha_1x^1+\alpha_2x^2=(1-\alpha_2)x^1+\alpha_2x^2$ cu $0\le\alpha_2\le 1$ şi $x\in C$ în virtutea definiției mulțimii convexe.

Fie *p* > 2 şi presupunem că orice combinație convexă a *p* – 1 puncte din C este în C. Dacă $\alpha_p=1$ atunci $\alpha_1=\dots=\alpha_{p-1}=0$ şi $x\equiv x^p\in C$. Putem presupune că $\alpha_p<1$. Atunci:

$$x=(1-\alpha_p)\left[\frac{\alpha_1}{1-\alpha_p}x^1+\dots+\frac{\alpha_{p-1}}{1-\alpha_p}x^{p-1}\right]+\alpha_px^p=(1-\alpha_p)y+\alpha_px^p \text{ cu } y=\frac{1}{1-\alpha_p}\sum_{i=1}^{p-1}\alpha_ix^i$$

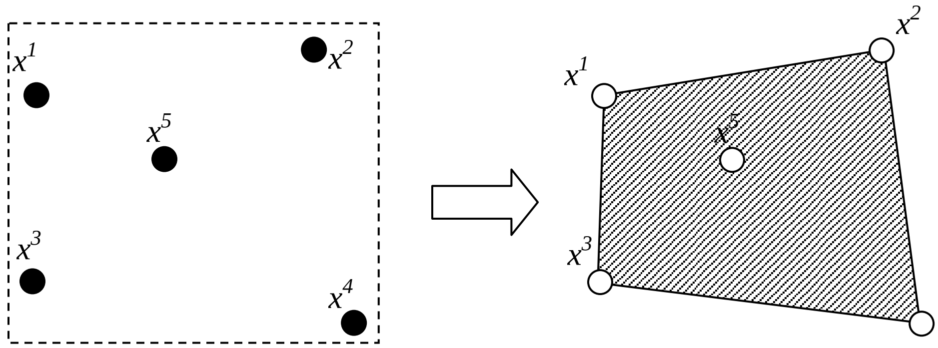
Se vede uşor că *y* este o combinație convexă a $p-1$ puncte din C şi ca urmare $y\in C$ în baza ipotezei de inducție. În fine, $x=(1-\alpha_p)y+\alpha_px^p$ cu $0\le\alpha_p<1$ arată că *x* este un punct pe segmentul $\left[y,x^p\right]$ în întregime inclus în C, mulțimea C fiind presupusă convexă. Deci $x\in C$.

Implicația $\Leftarrow$ este banală.

iii) Din i) rezultă că A′ este o mulțime convexă. Evident A $\subseteq$ A′ şi de aici Conv(A) $\subseteq$ A′ deoarece Conv(A) este cea mai mică mulțime convexă care conține mulțimea A. Pe de altă parte o combinație de puncte din A poate fi socotită ca o combinație convexă de puncte din Conv(A) pentru că A $\subseteq$ Conv(A). Folosind ii) rezultă A′ $\subseteq$ Conv(A) şi în concluzie A′ = Conv(A).

Un politop în R^n este acoperirea convexă a unui număr finit de puncte din R^n – vezi figura 14.14

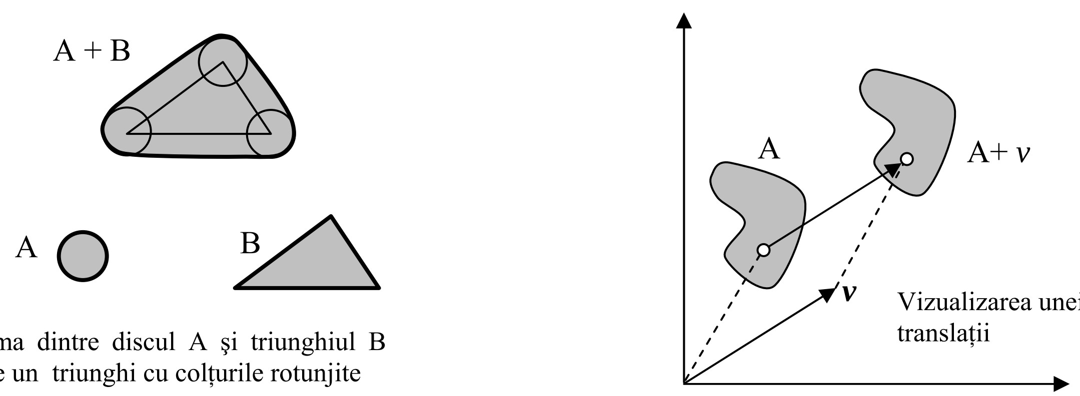
6. Se consideră politopul P = Conv$\left\{x^1,x^2,\dots,x^p\right\}\subset R^n$. Fie $r=\max\left\{\left\|x^1\right\|,\left\|x^2\right\|,\dots,\left\|x^p\right\|\right\}$ să se arate că $\|x\|\le r$ oricare ar fi $x\in P$, altfel spus **orice politop este o mulțime mărginită.**



A = {x^1, x^2, x^3, x^4, x^5}   Politopul Conv(A)

Figura 14.14

Se poate arăta că **un politop este** o mulțime poliedrală adică este mulțimea soluțiilor unui anumit sistem de inecuații liniare (nestricte) şi mai precis este **o mulțime poliedrală mărginită**. Este valabilă şi afirmația reciprocă: **o mulțime poliedrală mărginită este acoperirea convexă a unui număr finit de puncte.**



Suma dintre discul A şi triunghiul B este un triunghi cu colțurile rotunjite

Figura 14.15

Fie $A, B \subseteq R^n$ şi $\alpha \in R$. Definim mulțimile:

$$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\} \text{ şi } \alpha A = \{\alpha x \mid x \in A\}$$

A + B se numeşte **suma Minkowski** a mulțimilor A şi B. Dacă B se reduce la un punct, $B = \{v\}$vom scrie simplu A + v în loc de A +$\{v\}$şi vom zice că mulțimea A + v este **translația** mulțimii A definită de vectorul v. Dacă α este un scalar şi -α opusul său vom scrie -αA în loc de (-α)A şi A – B în loc de A + (-1)B. Evident $A - B = \{x - y \mid x \in A, y \in B\}$

Reprezenzările grafice ale unei sume şi a unei tranlații în planul R^2 sunt date în figura 14.15
Translația unei drepte este tot o dreaptă. Într-adevăr dacă D(x,y) este dreapta care trece prin punctele distincte x şi y atunci D(x,y) + v = D(x + v, y + v) vezi figura 14.16

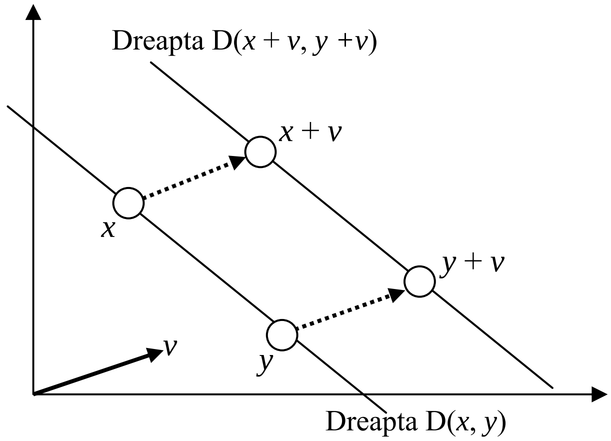


Figura 14.15

7. În planul R^2 se dau segmentele $A = \left[v^1, v^2\right]$ şi $B = \left[v^3, v^4\right]$ unde $v^1 = (1,-1)$, $v^2 = (2,1)$, $v^3 = (-2,1)$, $v^1 = (3,0)$. Să se reprezinte mulțimea A + B. Ce formă are?

8. În notațiile introduse,probați că dacă A şi B sunt mulțimi convexe atunci A + B şi αA sunt mulțimi convexe.

9. i) Să se arate că $B = \left\{x \in R^n \mid \|x\| \le 1\right\}$ este o mulțime convexă (B se numeşte **bila unitate (închisă)** ***n* – dimensională**)

ii) Fie $x^0 \in R^n$ şi $r > 0$. Mulțimea

$$B_r(x^0) = \left\{x \in R^n \;\middle|\; \left\|x - x^0\right\| \le r\right\}$$

se numeşte **bila (închisă) cu centrul în x^0 şi rază *r*.** Arătați că: $B_r(x^0) = x^0 + rB$

10. Se dau funcțiile numerice f şi g cu acelaşi domeniu de definiție $C \subseteq R^n$. Fie max (*f*,*g*) funcția definită pe C prin relația: max (*f*,*g*) (*x*) = max (*f*(*x*) , *g*(*x*)). Să se arate că:

$$\text{Epi}(\max(f, g)) = \text{Epi}(f) \cap \text{Epi}(g)$$

În particular, dacă C este o mulțime convexă şi funcțiile *f*,*g* sunt convexe atunci şi funcția max(*f*,*g*) este convexă.

11. i)Se consideră funcția patratică $\varphi(x) = x^T Cx$, $x \in R^n$ unde C este o matrice simetrică. Să se arate că pentru orice $x, y \in R^n$ şi $\alpha \in R$ are loc identitatea:

$$\varphi((1-\alpha)x + \alpha y) = (1-\alpha)\varphi(x) + \alpha\varphi(y) - \alpha(1-\alpha)\varphi(x-y)$$

Folosind i) să se arate că:

ii) φ este o funcție convexă ⇔ $\varphi(x) \ge 0 \quad (\forall)x \in R^n$;

iii) φ este o funcție strict convexă ⇔ $\varphi(x) > 0 \quad (\forall)x \in R^n, x \ne 0$;

12. Pentru ce valori ale parametrului $a \in R$ funcția patratică:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + a \cdot x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3^2$$

este strict convexă?

13. Arătați că funcția patratică $f(x_1,x_2) = -2x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2$ este strict convexă pe R^2 şi determinați minimul său.

14. Rezolvați programul patratic convex:

$$(P)\begin{cases}(\min) f = -8x_1 + 2x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 \\ 2x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

Ştiind că soluția optimă satisface cu egalitate prima restricție şi cu inegalitate strictă cealaltă restricție precum şi condițiile de nenegativitate.

15. Cercetați convexitatea următoarelor programe neliniare în formă canonică, scrieți condițiile de optimalitate KKT şi determinați soluțiile optime.

a) $$(P)\begin{cases}(\min) f = x_1^2 - 6x_1 + x_2^3 - 3x_2 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

b) $$(P)\begin{cases}(\min) f = 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \frac{25}{x_3} \le 28 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0\end{cases}$$

c) $$(P)\begin{cases}(\min) f = x_1 + \frac{a_1^2}{x_1} + x_2 + \frac{a_2^2}{x_2} \\ x_1 + x_2 \le I \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$ unde a_1, a_2, I sunt constante pozitive

Caz particular: $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $I = 6$.

Atenție: sunt două situații de analizat după cum minimul liber al funcției *f* satisface sau nu satisface restricția programului !

16. Cercetați convexitatea următorului program neliniar, aducându-l în prealabil la forma canonică şi determinați soluția sa optimă folosind condițiile KKT.

$$(P)\begin{cases}(\max) f = \ln(1 + x_1) - x_2^2 + x_2 \\ x_1 - 6x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

17. Se consideră pogramul neliniar:

$$(P)\begin{cases} \max \ \ x_1^2 x_2 \\ \quad x_1 + x_2^2 \le 3 \\ \quad 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

i) Reprezentați grafic mulțimea soluțiilor admisibile;

ii) Probați că programul (P′) rezultat din (P) prin înlocuirea funcției obiectiv $x_1^2 x_2$ cu funcția

$$\ln(x_1^2 x_2) = 2\ln x_1 + \ln x_2$$

este convex şi are aceeaşi soluție optimă ca şi (P);

iii) Determinați soluția optimă a programului (P) rezolvând programul convex (P′) cu ajutorul condițiilor de optimalitate KKT.

18. Determinați soluția optimă a programului neliniar:

$$(P)\begin{cases} \max \ \ x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I \quad \text{în care } \alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2, I \text{ sunt constante pozitive.} \\ x_1 \le 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Indicație: se maximizează funcția $f = \ln(x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2}) = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2$

19. Folosind condițiile KKT şi algoritmul simplex să se rezolve programele patratice convexe:

$$\text{a) } (P)\begin{cases} (\min) f = -5x_1 - 8x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 \\ \quad 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } (P)\begin{cases} (\min) f = -7x_1 - 15x_2 + x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2 \\ \quad x_1 + 2x_2 \le 30 \\ \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$