Dualul unui program liniar

Fixăm un program liniar (P) cu *m* restricţii şi *n* variabile $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Pentru a conferi construcţiei maxima generalitate vom presupune că, pe lângă variabile ce pot lua numai valori **nenegative** (≥ 0) există şi variabile ce pot lua numai valori **nepozitive** (≤ 0) precum şi variabile **fără restricţie de semn**, care pot lua orice valoare reală.
Asociem programului (P) un nou program liniar (Q) numit **programul dual**, după regulile I-IV de mai jos. În raport cu programul dual (Q), programul (P) se va numi **programul primal**.

I. Dacă în (P) funcţia obiectiv se **maximizează** (se **minimizează**), în programul (Q) funcţia obiectiv se **minimizează** (se **maximizează**).

II. **Restricţiei** de rang *i* din programul primal (P) îi corespunde în (Q) o **variabilă** $u_i \quad i = 1, \cdots, m$. Dacă restricţia de rang *i* este o **inegalitate concordantă** (o **inegalitate neconcordantă**, respectiv o **egalitate**) variabila duală u_i este **nenegativă** (**nepozitivă**, respectiv **fără restricţie de semn**).

III. **Variabilei** x_j din programul primal (P) îi corespunde în dualul (Q) **restricţia** de rang *j*, $j = 1,.., n$.

- membrul stâng al restricţiei duale este combinaţia $u_1 a_{1j} + u_2 a_{2j} + \cdots + u_m a_{mj}$ în care $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$ sunt coeficienţii variabilei x_j din toate restricţiile programului (P);
- membrul drept este coeficientul c_j pe care variabila x_j îl are în funcţia obiectiv din (P);
- dacă variabila x_j este **nenegativă** (**nepozitivă**, respectiv **fără restricţie de semn**) restricţia duală asociată este o **inegalitate concordantă** (**inegalitate neconcordantă**, respectiv **egalitate**)

Obs. o restricţie a unui program liniar se numeste:
- **concordantă**, dacă este o **inegalitate** de tipul ≤ într-o problemă de **maximizare** sau ≥ într-o problemă de **minimizare;**
- **neconcordantă**, dacă este o inegalitate de tipul ≥ într-o problemă de **maximizare** sau ≤ într-o problemă de **minimizare**.

Restricţiile inegalităţi nu fac obiectul acestei clasificări.

IV. **Funcţia obiectiv** a programului dual (Q) este $g = u_1 b_1 + u_2 b_2 + \cdots + u_m b_m$ unde $b_1, b_2, \cdots, b_m$ sunt **termenii liberi** ai restricţiilor din programul primal (P).

Prin urmare programul dual are atâtea variabile (restricţii) câte restricţii (variabile) are programul primal.

Exemplul 1. Construcţia dualului unui program liniar poate fi schematizată astfel:

Programul primal   Programul dual

$$(P)\left\{\begin{array}{lcl} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 \geq 12 & \leftrightarrow & u_1 \geq 0 \\ x_1 + 4x_2 \quad\quad + x_4 = 6 & \leftrightarrow & u_2 \ \mathit{frs} \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 \leq 8 & \leftrightarrow & u_3 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 & \leftrightarrow & 3u_1 + u_2 + 2u_3 \leq 10 \\ x_2 \leq 0 & \leftrightarrow & -u_1 + 4u_2 + 3u_3 \geq 7 \\ x_3 \geq 0 & \leftrightarrow & 2u_1 \quad\quad + 5u_3 \leq 2 \\ x_4 \ \text{frs} & \leftrightarrow & 6u_1 + u_2 - u_3 = 4 \\ (\min) f = 10x_1 + 7_2 + 2x_3 + 4x_4 & & (\max) g = 12u_1 + 6u_2 + 8u_3 \end{array}\right\}(Q)$$

Din construcţia prezentată rezultă următoarea concluzie importantă:

Dualul programului dual este programul primal.

Referitor la acest fapt, vom spune că dualitatea liniară are proprietatea de **simetrie**. Din această cauză, fiind dat un program liniar (P) şi dualul său (Q), vom spune că (P;Q) este un **cuplu de programe liniare în dualitate** fără a mai specifica în mod expres care problemă este primala şi care duala.

Exemplul 2: Programele liniare:

$$(P_1)\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 \leq 150 \\ \quad\quad\ \ x_2 \leq 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 300 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ (\max) f = 50x_1 + 40x_2 \end{array}\right. \qquad (P_2)\left\{\begin{array}{l} 3u_1 \quad\quad 8u_3 \geq 50 \\ 5u_1 + u_2 + 5u_3 \geq 40 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \\ (\min) g = 150u_1 + 20u_2 + 300u_3 \end{array}\right.$$

în care (P_1) este modelul firmei de calculatoare iar (P_2) este dualul său

Exemplul 3 Pentru ilustrare, să considerăm programul liniar:

$$(P)\left\{\begin{array}{l} (\max) f = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 30 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 50 \\ -x_1 + 6x_2 + 9x_3 \leq 200 \\ x_1 \geq 0 , x_2 \leq 0 , x_3 \ \text{frs} \end{array}\right.$$

al cărui dual este programul:

$$(Q)\begin{cases}(\min)g = 30u_1 + 50u_2 + 200u_3 \\ 4u_1 + 2u_2 - u_3 \geq 1 \\ -3u_1 + u_2 + 6u_3 \leq 2 \\ 2u_1 + 5u_2 + 9u_3 = -1 \\ u_1 \text{ frs }, u_2 \leq 0 \,, u_3 \geq 0\end{cases}$$

Principalele rezultate ale dualităţii liniare

Teorema 1 Fie (P) un program liniar în care funcţia obiectiv *f* se **maximizează** şi fie (Q) dualul său, în care funcţia obiectiv *g* se **minimizează**. Presupunem că programele (P) şi (Q) sunt **compatibile** şi fie $\overline{x}$ respectiv $\overline{u}$ o soluţie **admisibilă oarecare** a programului (P), respectiv a programului (Q). Atunci:

i) $f(\overline{x}) \leq g(\overline{u})$

ii) Dacă $f(\overline{x}) = g(\overline{u})$ atunci $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ sunt soluţii **optime** ale programelor (P) respectiv (Q).

Demonstraţie.i) Putem presupune că (P) şi (Q) sunt forme canonice:

$$(P)\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ (\max)f = cx \end{cases} \qquad (Q)\begin{cases} uA \geq c \\ u \geq 0 \\ (\min)g = ub \end{cases}$$

Prin ipoteză: $\begin{cases} A\overline{x} \leq b \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} \overline{u}A \geq c \\ \overline{u} \geq 0 \end{cases}$

Atunci: $\begin{cases} A\overline{x} \leq b \\ \overline{u} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{u}A\overline{x} \leq \overline{u}b$; $\begin{cases} \overline{u}A \geq c \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{u}A\overline{x} \geq c\overline{x}$

Rezultă: $c\overline{x} \leq \overline{u}A\overline{x} \leq \overline{u}b$ şi deci: $f(\overline{x}) \leq g(\overline{u})$.

ii) Dacă $c\overline{x} = \overline{u}b$ şi $\overline{x}$ nu ar fi soluţia optimă a programului (P) ar exista o soluţie admisibilă $\overline{x}'$ a lui (P) mai bună decât $\overline{x}$ în sensul că $c\overline{x}' > c\overline{x}$. Ar rezulta că $c\overline{x}' > \overline{u}b \Leftrightarrow f(\overline{x}') > g(\overline{u})$ contrar celor demonstrate mai înainte.

Observaţie: Din teorema 1 rezultă în particular că dacă (P) şi (Q) sunt programe compatibile atunci ambele au optim finit şi $(\max)f \leq (\min)g$. În fapt, avem chiar egalitate, aşa cum arată următoarea:

Teorema 2 (teorema fundamentală a dualităţii) Orice cuplu de programe liniare în dualitate se găseşte în una şi numai în una din următoarele trei situaţii:

I) Ambele programe sunt compatibile. **Atunci ambele programe au soluţii optime şi valorile optime ale funcţiilor obiectiv coincid.**

II) Numai unul dintre programe este compatibil celălalt fiind incompatibil. **Atunci programul compatibil are optim infinit.**

III) Ambele programe sunt incompatibile.

Notă: „Substanţa” teoremei fundamentale este dată de afimaţiile subliniate; limitele impuse acestei lucrări nu permit justificarea acestor afirmaţii. O precizare la prima aserţiune este dată în următoarea:

Teorema 3 Fie (P) un program liniar în formă standard cu optim finit, dat împreună cu dualul său (Q)

$$(P)\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \qquad (Q)\begin{cases} uA \geq c \\ u \ \textbf{frs} \\ (\min) g = ub \end{cases}$$

şi fie B o bază admisibilă a lui (P) a cărei soluţie asociată $x^* = x(B)$ este optimă. Atunci vectorul:

$$u^* = c^B B^{-1}$$

este o soluţie optimă a programului dual (Q).

Demonstraţie: Teorema 3 va fi o consecinţă a teoremei 1 dacă demonstrăm că:

i) u^* este o soluţie a problemei (Q) adică $u^* A \geq c$;

ii) $f(x^*) = g(u^*)$

În notaţiile introduse în secţiunile precedente avem:

i) $u^* A - c = u^*[B\,,\,S] - [c^B\,,\,c^S] = [u^* B - c^B\,,\,u^* S - c^S] = [c^B - c^B\,,\,c^B B^{-1} S - c^S] = [0\,,\,\overline{c}] \geq 0$
deoarece B este o bază optimă;

ii) $f(x^*) = cx^* = c^B B^{-1} b = u^* b = g(u^*)$

Foarte important: Soluţia optimă $u^* = c^B B^{-1}$ a programului dual (Q) se poate citi din tabelul simplex optim al programului primal (P) fiind formată din mărimile:

$$z_j = c^B \overline{A}^j = \sum_{i \in I} c_i \overline{a}_{ij}$$

corespunzătoare coloanelor A^j care au format baza unitară de start (după cum se ştie deja, coloanele $\overline{A}^j$ corespunzătoare coloanelor A^j din baza unitară de start formează inversa B^{-1} a bazei optime!!

În continuare fixăm un cuplu (P;Q) de programe liniare în dualitate. Se ştie că fiecărei variabile din (P) sau din (Q) îi corespunde o restricţie în cealaltă problemă. Prin definiţie, **ecartul** unei restricţii este diferenţa dintre cei doi membri ai săi. Evident, dacă restricţia este o egalitate ecartul său este zero în orice soluţie a programului din care face parte restricţia. Vom nota cu $\mathcal{S}$(P,Q) ansamblul relaţiilor de forma:

$$\boxed{\begin{matrix}\text{VARIABILĂ} \\ \text{din (P) sau din (Q)}\end{matrix} \times \begin{matrix}\text{ECARTUL restricţiei} \\ \text{asociate în duală}\end{matrix} = 0}$$

cu convenţia de a nu include în sistem relaţiile în care ecartul este identic zero. Relaţiile din sistemul $\mathcal{S}$(P,Q) se numesc **relaţii de complementaritate**.

Exemplul 4 Pentru cuplul de probleme în dualitate:

$$(P)\left\{\begin{array}{lcr} x_1 \qquad + 3x_3 \le 20 & \leftrightarrow & u_1 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \qquad \ge 35 & \leftrightarrow & u_2 \le 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 30 & \leftrightarrow & u_3 \text{ frs} \\ x_1 \ge 0 & \leftrightarrow & u_1 + 2u_2 + 3u_3 \ge 8 \\ x_2 \ge 0 & \leftrightarrow & u_2 - u_3 \ge -6 \\ x_3 \ge 0 & \leftrightarrow & 3u_1 \qquad + 2u_3 \ge 7 \\ (\max) f = 8x_1 - 6x_2 + 7x_3 & & (\min) g = 20u_1 + 35u_2 + 30u_3 \end{array}\right\}(Q)$$

sistemul relaţiilor de complementaritate este format din egalităţile:

$$\mathcal{S}(\text{P,Q})\begin{cases} u_1(\ x_1 + \qquad 3x_3 - 20) = 0 & (1) \\ u_2(2x_1 + \ x_2 \qquad - 35) = 0 & (2) \\ x_1(\ u_1 + 2u_2 + 3u_3 - 8) = 0 & (3) \\ x_2(\qquad u_2 - \ u_3 + 6) = 0 & (4) \\ x_3(3u_1 \qquad + 2u_3 - 7) = 0 & (5) \end{cases}$$

Relaţia $u_3(3x_1 - x_2 + 2x_3 - 30) = 0$ a fost exclusă deoarece ecartul din paranteză este identic zero!

Exemplul 5 Pentru cuplul de probleme în dualitate în formă canonică:

$$(P)\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \qquad\qquad (Q)\begin{cases} uA \ge c \\ u \ge 0 \\ (\min) g = ub \end{cases}$$

sistemul $\mathcal{S}$(P,Q) are forma matricială:

$$\begin{cases} u(Ax-b)=0 \\ (uA-c)x=0 \end{cases}$$

(cu notaţiile matriciale introduse în secţiunea 5.2)

Exemplul 6 Pentru cuplul:

$$(P)\begin{cases} Ax=b \\ x\geq 0 \\ (\max)f=cx \end{cases} \qquad (Q)\begin{cases} uA\geq c \\ u\ \textbf{frs} \\ (\min)g=ub \end{cases}$$

în care (P) este o formă standard, sistemul $\mathcal{S}$(P,Q) se reduce la:

$$(uA-c)x=0$$

Cu aceste pregătiri putem enunţa:

Teorema 4 (Teorema ecarturilor complementare) Fie (P,Q) un cuplu de programe liniare în dualitate şi fie $\mathcal{S}$(P,Q) sistemul relaţiilor de complementaritate. Atunci, un cuplu de soluţii **admisibile** $(\overline{x},\overline{u})$ ale programelor (P) respectiv (Q) este un cuplu de soluţii **optime** ale celor două programe, dacă şi numai dacă $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ verifică sistemul $\mathcal{S}$(P,Q).

Demonstraţie: Fără a restrânge generalitatea putem presupune că (P) şi (Q) sunt forme canonice:

$$(P)\begin{cases} Ax\leq b \\ x\geq 0 \\ (\max)f=cx \end{cases} \qquad (Q)\begin{cases} uA\geq c \\ u\geq 0 \\ (\min)g=ub \end{cases}$$

(aceasta deoarece, orice program liniar poate fi transformat într-o formă canonică echivalentă). Sistemul $\mathcal{S}$(P,Q) se compune din relaţiile matriciale:

$$\begin{cases} u(Ax-b)=0 \\ (uA-c)x=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Presupunem că $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ sunt soluţii optime ale programelor (P) respectiv (Q). Probăm că $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ satisfac sistemul $\mathcal{S}$(P,Q).

Fie $\alpha=\overline{u}(b-A\overline{x})$ şi $\beta=(\overline{u}A-c)\overline{x}$. Evident $\alpha\geq 0,\beta\geq 0$ deoarece $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ sunt soluţii admisibile ale celor două programe. Atunci:

$$\alpha+\beta=\overline{u}b-\overline{u}A\overline{x}+\overline{u}A\overline{x}-c\overline{x}=\overline{u}b-c\overline{x}=0$$

deoarece, în baza teoremei fundamentale a dualităţii, optimele $c\bar{x}$ şi $\bar{u}b$ ale celor două programe coincid!
Din $\alpha + \beta = 0$ şi $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ rezultă $\alpha = \beta = 0$ ceeace înseamnă că $\bar{x}$ şi $\bar{u}$ satisfac $\mathcal{S}$(P,Q).

$\Leftarrow$ Presupunem că $\bar{x}$ şi $\bar{u}$ sunt soluţii admisibile ale programelor (P) respectiv (Q) care satisfac sistemul $\mathcal{S}$(P,Q). Din $\bar{u}(b - A\bar{x}) = 0$ şi $(\bar{u}A - c)\bar{x} = 0$ rezultă $c\bar{x} = \bar{u}A\bar{x} = \bar{u}b$ şi în baza teoremei 1 soluţiile $\bar{x}$ şi $\bar{u}$ sunt într-adevăr optime.

Foarte important: teorema ecarturilor complementare ne permite să determinăm soluţia optimă a unui program liniar dacă ştim soluţia optimă a dualului său. Altfel spus, **rezolvarea unui program liniar este echivalentă cu rezolvarea dualului său.**

Exemplul 7 Considerăm cuplul de programe în dualitate din exemplul 3. Vom determina soluţia optimă a programului (P) ştiind că dualul (Q) are soluţia optimă $u_1^* = 0$, $u_2^* = -2$, $u_3^* = 4$.Introducem u^* în relaţiile (1) – (5) din sistemul $\mathcal{S}$(P,Q):

(1) → nu dă nimic (în sensul că paranteza poate avea orice valoare!)
(2) → **la optim** $2x_1 + x_2 - 35 = 0$ deoarece $u_2^* = -2 \neq 0$
(3) → nu dă nimic;
(4) → nu dă nimic;
(5) → **la optim** $x_3 = 0$ deoarece $3u_1^* + 2u_3^* - 7 = 1 \neq 0$

Prin urmare, soluţia optimă a programului (P) trebuie să verifice relaţiile:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 35 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

rezultate din analiza întreprinsă, precum şi restricţia egalitate din (P):

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 30$$

Rezolvând sistemul format se găseşte $x_1^* = 13$, $x_2^* = 9$, $x_3^* = 0$.

Algoritmul simplex dual

Reluăm programul liniar general, în formă standard:

$$(P)\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ (\max) f = cx \end{cases}$$

în ipotezele şi notaţiile introduse în secţiunile unităţii de învăţare 3.
În raport cu o bază oarecare B a programului (P) am definit următoarele concepte:

- **soluţia asociată** $x(B) = \begin{bmatrix} x^B \\ x^S \end{bmatrix}$ dată de formulele:

$$x^B = B^{-1}b \text{ , } x^S = 0 \text{ sau, pe componente: } x_i = \overline{b_i} \text{ , } i \in I \quad x_j = 0 \text{ , } j \in J$$

- **costurile reduse asociate,** reunite în vectorul:

$$\overline{c} = c^B B^{-1} S - c^S \text{ sau pe componente } \overline{c}_j = \underbrace{c^B B^{-1} A^j}_{z_j} - c_j = z_j - c_j \quad j \in J$$

Vom spune că baza B este:

- p**rimal admisibilă** dacă soluţia $x(B)$ asociată bazei B este admisibilă, adică $\overline{b_i} \geq 0$, $i \in I$;

- d**ual admisibilă** dacă se verifică criteriul de optimalitate al algoritmului simplex adică: $\overline{c}_j \geq 0$, $j \in J$ în problemele de maximizare sau $\overline{c}_j \leq 0$, $j \in J$ în cele de minimizare.

Soluţia asociată $x(B)$ se va numi primal sau dual admisibilă dacă baza B este primal sau dual admisibilă.

Evident, dacă baza B este simultan primal şi dual admisibilă atunci ea este chiar optimă în sensul că soluţia asociată este o soluţie optimă a programului (P).

Algoritmul simplex prezentat în capitolul anterior şi căruia îi vom zice în continuare **algoritmul simplex primal** determină o bază optimă prin generarea unei secvenţe (finite) de baze primal admisibile. Pentru pornire este necesară cunoaşterea unei asemenea baze.

Algoritmul simplex dual datorat lui LEMKE (1953) determină o bază optimă pentru programul (P) prin generarea unei secvenţe (finite) de baze dual admisibile şi are nevoie la start de o asemenea bază.

Instrucţiunile algoritmului simplex dual sunt următoarele:

Start: se presupune cunoscută o bază dual admisibilă B precum şi tabelul simplex T_B asociat acesteia.

Conţinutul unei iteraţii:

Pasul 1 (Testul de optimalitate) Dacă $\overline{b}_i \geq 0$, $i \in I$ (adică toate componentele coloanei VVB sunt **nenegative**) **Stop**: soluţia asociată bazei B este **optimă** (fiind simultan primal şi dual admisibilă). În caz contrar se trece la:

Pasul 2 (Criteriul de ieşire din bază) Se determină indicele bazic $r \in I$ cu proprietatea:

$$\overline{b}_r = \min \left\{ \overline{b}_i \ , i \in I \right\} \tag{1}$$

Coloana A^r părăseşte baza curentă.

Pasul 3 (testul de recunoaştere a incompatibilităţii) dacă $\overline{a}_{rj} \geq 0$, $j \in J$ (adică toate componentele liniei variabilei bazice x_r situate în corpul mare al tabelului simplex sunt **nenegative**) **Stop**: programul (P) este **incompatibil**. În caz contrar se trece la:

Pasul 4 (criteriul de intrare în bază) Se determină indicele nebazic $k \in J$ cu formula:

$$\left| \frac{\overline{c}_k}{\overline{a}_{rk}} \right| = \min \left\{ \left| \frac{\overline{c}_j}{\overline{a}_{rj}} \right| , \ j \in J \ cu \ \overline{a}_{rj} < 0 \right\} \tag{2}$$

Coloana A^k intră în baza curentă.

Pasul 5 (Pivotare) Se construieşte tabelul simplex $T_{B'}$ asociat bazei B' dedusă din B prin înlocuirea coloanei A^r cu coloana A^k prin **pivotarea** tabelului simplex T_B cu **pivotul** $\overline{a}_{rk} < 0$.

Se actualizează baza curentă B ← B' şi se revine la pasul 1 în cadrul unei noi iteraţii.

Observaţii (similare celor făcute pe marginea algoritmului simplex primal):

- alegerea coloanei care părăseşte baza curentă după relaţia (1) are menirea de a accelera procesul iterativ;
- alegerea coloanei care intră în baza curentă după relaţia (2) ne asigură că şi noua bază va fi dual admisibilă;
- în caz că minimul din (1) sau minimul din (2) nu este unic se aplică regula lui Bland: se alege indicele **cel mai mic** care verifică relaţia respectivă.

Important: Algoritmul simplex dual nu trebuie privit ca o alternativă a algoritmului primal! Acesta este şi motivul pentru care nu discutăm modalităţile de determinare a unei baze dual admisibile de start. În principiu, orice problemă de programare liniară se va rezolva cu ajutorul algoritmului simplex primal şi numai în acele cazuri în care vor rezulta baze dual admisibile se va aplica algoritmul simplex dual.

Exemplul 8 Pentru un program liniar în formă canonică de maximizare şi în care toţi termenii liberi ai restricţiilor sunt nenegativi, rezolvarea (manuală) cu algoritmul simplex primal, nu pune probleme deosebite: o bază (primal) admisibilă de start este formată din coloanele variabilelor de abatere!
Prin simetrie, aplicarea algoritmului simplex dual unei forme canonice de minimizare, în care toţi coeficienţii funcţiei obiectiv sunt nenegativi, este tot atât de simplă: coloanele variabilelor de abatere asigură o bază dual admisibilă de start!
Pentru ilustrare vom considera programul liniar:

$$(P)\begin{cases}(\min) f = 12x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{cases}$$

Introducem variabilele de abatere x_4 şi x_5 după care înmulţim cu -1 egalităţile rezultate:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \quad &= -3 \\ -4x_1 - x_2 - x_3 \quad + x_5 &= -4 \end{aligned}$$

Soluţia asociată bazei $E = \lfloor A^4, A^5 \rfloor$ nu este admisibilă:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = -3 \quad x_5 = -4$$

dar dacă evaluăm costurile reduse $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ constatăm că ele verifică criteriul de optimalitate al algoritmului simplex – bineînţeles pentru problemele de minimizare! – vezi tabelul simplex 5.1 Prin urmare, baza $E = \lfloor A^4, A^5 \rfloor$ este dual admisibilă.
Să urmărim aplicarea instrucţiunilor algoritmului simplex dual (instrucţiunile evident verificate nu au mai fost specificate!)

			12	2	6	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	3	2	-1	1	0
0	x_5	-4	-4	$\boxed{-1}$	-1	0	1
	f	0	-12	-2	-6	∗	∗
0	x_4	-11	$\boxed{-5}$	0	-3	1	2
2	x_2	4	4	1	1	0	-1
	f	8	-4	∗	-4	∗	-2
12	x_1	11/5	1	0	3/5	-1/5	-2/5
2	x_2	-24/5	0	1	$\boxed{-7/5}$	4/5	3/5
	f	84/5	∗	∗	-8/5	-4/5	-18/5
12	x_1	1/7	1	3/7	0	1/7	-1/7
6	x_3	24/7	0	-5/7	1	-4/7	-3/7
	f	156/7	∗	-8/7	∗	-12/7	-30/7

Tabelele 1 – 4

Iteraţia 1 (tabelul 5.1)

Pasul 2 Conform relaţiei (1), coloana A^5 iese din baza curentă.

Pasul 4 Se aplică relaţia (2): $\min\left\{\left|\frac{-12}{-4}\right|, \left|\frac{-2}{-1}\right|, \left|\frac{-6}{-1}\right|\right\} = 2 \Rightarrow$ coloana A^2 intră în baza curentă.

Pasul 5 Pivotarea tabelului 5.1 cu pivotul încadrat **-1** conduce la tabelul 5.2

Iteraţia 2 (tabelul 5.2)

Pasul 2 Coloana A^4 iese din baza curentă (unic candidat!).

Pasul 4 Se aplică relaţia (2): $\min\left\{\left|\frac{-4}{-5}\right|, \left|\frac{-4}{-3}\right|\right\} = \frac{4}{5} \Rightarrow$ coloana A^1 intră în baza curentă.

Pasul 5 Pivotarea tabelului 5.2 cu pivotul încadrat **-5** conduce la tabelul 5.3

Iteraţia 3 (tabelul 5.3)

Pasul 2 Coloana A^2 iese din baza curentă (unic candidat!).

Pasul 4 Coloana A^3 intră în baza curentă (unic candidat!).

Pasul 5 Pivotarea tabelului 5.3 cu pivotul încadrat **-7/5** conduce la tabelul 5.4

Iteraţia 4 (tabelul 5.4)

Pasul 1 Soluţia curentă este simultan primal şi dual admisibilă .

Soluţia optimă a programului (P) are componentele:

$$x_1^* = \frac{1}{7} \quad , \quad x_2^* = 0 \quad , \quad x_3^* = \frac{24}{7} \quad ; \quad (\min) f = \frac{156}{7}$$

Probleme propuse

1. Scrieţi dualele următoarelor programe liniare

a) $\begin{cases} (\max) f = 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 10x_4 + 8x_5 \\ -x_1 \quad + \ 2x_3 + 3x_4 - \ x_5 \geq 10 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 + \ x_4 + 5x_5 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + \ x_3 - \ x_4 + 4x_5 = 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \ ; x_3, x_4 \geq 0 \ ; x_5 \text{ frs} \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\max) f = 4x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (\min) f = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

2. Se consideră un program liniar (P) împreună cu dualul său (Q). Fie u_1 variabila din (Q) asociată primei restricţii din (P). Dacă în soluţia optimă a dualului(Q), u_1 are o valoare **negativă** care din următoarele afirmaţii – referitoare la prima restricţie din (P) – este **întotdeauna** adevărată?

a) este o inegalitate neconcordantă;
b) este o inegalitate concordantă;
c) este o egalitate;
d) este o egalitate sau o inegalitate concordantă;
e) este o egalitate sau o inegalitate neconcordantă.

3. Să se scrie dualele următoarelor programe liniare:

a) $\begin{cases} (\min) f = 5x_1 - 6x_2 \\ -x_1 \qquad \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\max) f = 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + \ x_2 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (\min) f = x_1 + x_2 \\ 2x_1 + \ x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + \ x_2 \geq 2 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Utilizând metoda grafică sau algoritmul simplex să se rezolve cuplurile de probleme obţinute. Să se compare valorile funcţiilor obiectiv în soluţiile optime atunci când acestea există.

4. Se dă programul liniar:

$$(P) \begin{cases} (\min) g = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Se notează cu V numărul vârfurilor mulţimii soluţiilor admisibile ale programului dual (Q) şi cu u^* soluţia optimă a lui (Q). Atunci:

a) $V = 4$, $u^* = \left(\frac{11}{5}, \frac{18}{5}\right)$; b) $V = 4$, $u^* = \left(\frac{9}{8}, \frac{3}{8}\right)$; c) $V = 3$, $u^* = \left(\frac{11}{5}, \frac{18}{5}\right)$; d) $V = 3$, $u^* = \left(\frac{9}{8}, \frac{3}{8}\right)$;

e) $V = 5$, $u^* = \left(\frac{9}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

5. a) Ce particularitate prezintă un program liniar în al cărui dual variabilele nu au restricţie de semn?
b) Ce particularitate are un program liniar dacă programul dual asociat este în forma standard?
c) Ce se poate spune despre un program liniar al cărui dual are optim infinit?
d) Ce se poate spune despre un program liniar al cărui dual este un program incompatibil?
e) Ce se poate spune despre un program liniar al cărui dual are optim finit?

6. a) Scrieţi dualul (Q) asociat programului liniar:

$$(P)\begin{cases}(\max) f = x_1 + x_2\\ 3x_1 + 2x_2 \le 12\\ -2x_1 + x_2 \le 2\\ x_1 + 2x_2 \le 6\\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

b) Se dau următoarele cupluri de soluţii **admisibile** pentru cuplul de programe în dualitate (P,Q):

$$\begin{cases}x = (3, \frac{3}{2})\\ u = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4})\end{cases} \qquad \begin{cases}x = (\frac{7}{3}, \frac{5}{3})\\ u = (1, 1, 1)\end{cases}$$

Care dintre ele este un cuplu de soluţii optime?

7. Scrieţi dualul (Q) asociat programului liniar:

$$(P)\begin{cases}(\min) f = 2x_1 + x_2\\ 3x_1 + x_2 \ge 3\\ 4x_1 + 3x_2 \ge 6\\ x_1 + 2x_2 \le 3\\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{cases}$$

Care dintre următoarele două cupluri de vectori este un cuplu de soluţii optime ale celor două programe?

$$\begin{cases} x = (\frac{4}{5}, \frac{4}{5}) \\ u = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}) \\ u = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0) \end{cases}$$

8. Se consideră programul liniar:

$$(P)\begin{cases} (\max) f = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \le 30 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 \le 22 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

împreună cu dualul său (Q) în care variabilele u_1, u_2 sunt asociate primei respectiv celei de a doua restricţii din (P). Fie $x^{\bullet} = (x_1^{\bullet}, x_2^{\bullet}, x_3^{\bullet})$ şi $u^{\bullet} = (u_1^{\bullet}, u_2^{\bullet})$ soluţiile optime ale celor două programe.

Dacă $x_2^{\bullet} > 0$ şi $u_1^{\bullet} = 3$ atunci valoarea maximă a funcţiei obiectiv f este:

a) 216; b) 76 ; c) 164 ; d) 52 ; e) 112

9. Se consideră programul liniar:

$$(P)\begin{cases} (\max) f = 50x_1 + 40x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Fie u_1, u_2, u_3 variabilele programului dual.Ştiind că în soluţia optimă a programului dual avem u_1>0 şi u_3>0, valoarea maximă a funcţiei obiectiv din (P) este:

a) 1980 ; b) 1890 ; c) 2120 ; d) 2080 ; e) 2020

10. Se consideră următoarea problemă de maximizare a venitului unei firme cu trei activităţi care utilizează trei resurse:

$$\begin{cases} (\max) f = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 100 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 100 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 120 \\ x_j \ge 0 \quad j = 1,2,3 \end{cases}$$

Se ştie că baza optimă B este formată din coloanele A^3 , A^1 , A^2 ale matricii tehnologice şi că:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

Dacă disponibilul actual al resursei R_3 – care trebuie consumată în întregime - **scade** cu o unitate atunci venitul maxim al firmei:

a) creşte cu $\frac{1}{10}$; b) creşte cu $\frac{1}{5}$; c) scade cu $\frac{1}{5}$; d) nu se modifică ; e) scade cu $\frac{1}{10}$.

11. Instrucţiunile algoritmului simplex dual sunt:

P ≡ Se pivotează tabelul simplex curent;
O ≡ Se cercetează dacă soluţia dual admisibilă curentă are toate componentele nenegative;
I ≡ Se aplică criteriul de intrare în bază;
E ≡ Se aplică criteriul de ieşire din bază;
S ≡ Se cercetează dacă este verificată condiţia de incompatibilitate de către programul care se rezolvă.

În ce ordine se aplică aceste instrucţiuni?

a) **O,E,I,S,P** ; b) **O,E,S,I,P** ; c) **O,S,E,I,P** ; d) **O,I,S,E,P** ; e) **O,I,E,S,P**

12. Folosind algoritmul simplex dual să se rezolve.

i) programul liniar c) din exerciţiul 1;
ii) programul liniar din exerciţiul 4;
iii) programul liniar din exerciţiul 7.

(se va proceda ca în exemplul 5.8 din secţiunea 5.5).