Exemple de aplicare a algoritmului simplex

Exemplul 1 Problema firmei de calculatoare:

$$
(P)\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 150 \\ \qquad\quad x_2 \le \ 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ (\max) f = 50x_1 + 40x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad (FSP)\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad\qquad = 150 \\ \qquad\quad x_2 \quad + x_4 \qquad = \ 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \qquad\qquad + x_5 = 300 \\ \qquad x_j \ge 0 \quad j = 1, \cdots, 5 \\ (\max) f = 50x_1 + 40x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \end{cases}
$$

			50	40	0	0	0	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	150	3	5	1	0	0	150:3 = 50
0	x_4	20	0	1	0	1	0	—
0	x_5	300	$\boxed{8}$	5	0	0	1	300:8 = 37,5
	f	0	-50	-40	*	*	*	
0	x_3	75/2	0	$\boxed{25/8}$	1	0	-3/8	75/2 : 25/8 = 12
0	x_4	20	0	1	0	1	0	20 : 1 = 20
50	x_1	75/2	1	5/8	0	0	1/8	75/2 : 5/8 = 60
	f	1875	*	-35/4	*	*	25/4	
40	x_2	12	0	1	8/25	0	-3/25	
0	x_4	8	0	0	-8/25	1	3/25	
5	x_1	30	1	0	-1/5	0	1/5	
	f	1980	*	*	14/5	*	26/5	

ITERAŢIA 1

Baza: $B^1 = \lfloor A^3, A^4, A^5 \rfloor$.

Soluţia asociată: $x(B^1) = (0,0,150,20,300)$, f=0

$\bar{c}_1 < 0, \bar{c}_2 < 0 \rightarrow$ criteriul de optim nu este verificat.

În bază intră A^1 şi iese A^5.

ITERAŢIA 1

Baza: $B^2 = \lfloor A^3, A^4, A^1 \rfloor$. Soluţia asociată:

$x(B^2) = (75/2, 0, 75/2, 20, 0)$, f=1875

$\bar{c}_2 < 0 \rightarrow$ criteriul de optim nu este verificat.

În bază intră A^2 şi iese A^3.

ITERAŢIA 3

Baza: $B^3 = \lfloor A^2, A^4, A^1 \rfloor$. Soluţia asociată:

$x(B^3) = (30, 12, 0, 8, 0)$, f=1980

Criteriul de optim este verificat $\rightarrow$ soluţia curentă este optimă.

Exemplul 4.3 (interpretarea geometrică a algoritmului simplex). Procedura a plecat din vârful O apoi s-a deplasat către vârful "mai bun" A şi s-a oprit în vârful "optim"B.

Baza B	Soluţia x(B) asociată	Proiecţia în planul (x_1,x_2)	Valoarea funcţiei obiectiv
$B^1 \equiv \lfloor A^3, A^4, A^5 \rfloor$	$x(B^1) = (0,0,150,20,300)$	O ≡ (0,0)	0
$B^2 \equiv \lfloor A^3, A^4, A^1 \rfloor$	$x(B^2) = (\frac{75}{2},0,\frac{75}{2},20,0)$	A≡ (37.5,0)	1875
$B^3 \equiv \lfloor A^2, A^4, A^1 \rfloor$	$x(B^3) = (30,12,0,8,0)$	B≡ (30,12)	1980

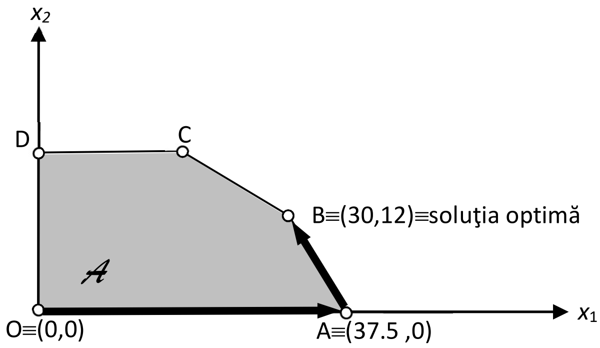


Figura 4.3

Exemplul 2

$$(P)\begin{cases}(\max) f = 8x_1 - 6x_2 + 7x_3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 30 \\ 2x_1 + x_2 \geq 35 \\ x_1 + 3x_3 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\end{cases}.$$

$$(FSP)\begin{cases}3x_1 - x_2 + 2x_3 = 30 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 35 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,\cdots,5 \\ (\max) f = 8x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5\end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\quad A^1 \; A^2 \; A^3 \; A^4 \; A^5$$

$$(FBP)\begin{cases}3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_6 = 30 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 35 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,\cdots,7 \\ (\max) f = 8x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 - Mx_6 - Mx_7\end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$\quad A^1 \; A^2 \; A^3 \; A^4 \; A^5 \; A^6 \; A^7$$

			8	-6	7	0	0	-M	-M	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-M	x_6	30	$\boxed{3}$	-1	2	0	0	1	0	30:3=**10**
-M	x_7	35	2	1	0	-1	0	0	1	35:2=17.5
0	x_5	20	1	0	3	0	1	0	0	20:1=20
	f	-65M	-5M-8	6	-2M-7	M	*	*	*	
8	x_1	10	1	-1/3	2/3	0	0	1/3	0	-
-M	x_7	15	0	$\boxed{5/3}$	-4/3	-1	0	-2/3	1	15:5/3=**9**
0	x_5	10	0	1/3	7/3	0	1	-1/3	0	10:1/3=30
	f	-15M+80	*	-5M/3+10/3	4M/3-5/3	M	*	5M/3+8/3	*	
8	x_1	13	1	0	2/5	-1/5	0	1/5	1/5	
-6	x_2	9	0	1	-4/5	-3/5	0	-2/5	3/5	
0	x_5	7	0	0	13/5	1/5	1	-1/5	-1/5	
	f	50	*	*	1	2	*	M+4	M-2	

Exemplul 3

$$(P)\begin{cases}(\max)f = 3x_1 + 4x_2\\ -3x_1 + 4x_2 \le 12\\ -2x_1 + \ \ x_2 \le \ 2\\ \quad x_1 - 2x_2 \le \ 2\\ x_1 \ge 0\,,\, x_2 \ge 0\end{cases}$$

(optim infinit).

Forma standard şi matricea tehnologică a acesteia:

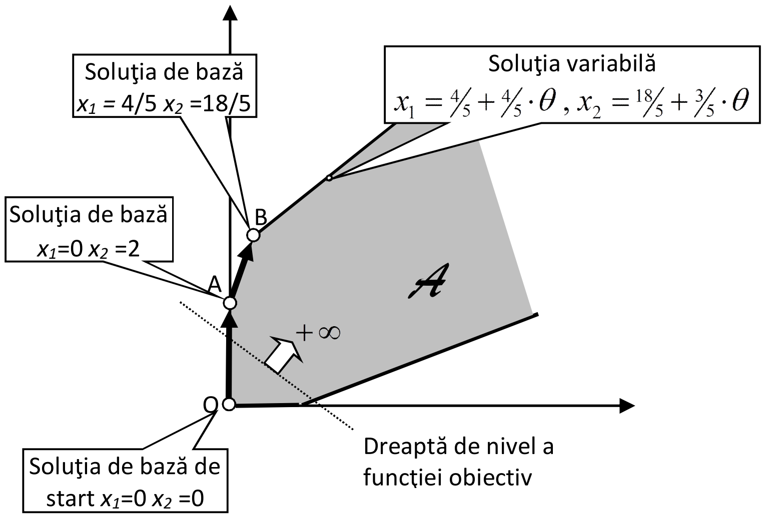
$$(FSP)\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad\qquad = 12\\ -2x_1 + \ \ x_2 \qquad + x_4 \qquad = \ 2\\ \quad x_1 - 2x_2 \qquad\qquad + x_5 = \ 2\\ \quad x_j \ge 0 \quad j = 1,\cdots,5\\ (\max)f = 3x_1 + 4x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5\end{cases} \qquad A = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ \begin{matrix} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 & A^5\end{matrix}\end{array}$$

Plecăm cu baza unitară $E = \left[A^3\ A^4\ A^5\right]$. După trei iteraţii – vezi tabelele 4.10 – 4.12 - se obţine soluţia asociată bazei $B = \left[A^1\ A^2\ A^5\right]$ care nu verifică criteriul de optim întrucât $\bar{c}_4 = -24/5 < 0$ dar satisface condiţia criteriului de recunoaştere a optimului infinit: $\overline{A}^4 = B^{-1}A^4 \le 0$.

			3	4	0	0	0	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	12	-3	4	1	0	0	12:4 = 3
0	x_4	2	-2	$\boxed{1}$	0	1	0	2:1 = **2**
0	x_5	2	1	-2	0	0	1	-
	f	0	-3	-4	*	*	*	
0	x_3	4	$\boxed{5}$	0	1	-4	0	4:5 = **0.8**
4	x_2	2	-2	1	0	1	0	-
0	x_5	6	-3	0	0	2	1	-
	f	8	-11	*	*	4	*	
3	x_1	4/5	1	0	1/5	-4/5	0	
4	x_2	18/5	0	1	2/5	-3/5	0	
0	x_5	42/5	0	0	3/5	-12/5	1	
	f	84/5	*	*	11/5	-24/5	*	

Interpretarea geometrică

Proiecţiile soluţiilor de bază cercetate de algoritm în planul variabilelor x_1 , x_2 sunt vârfurile O(0,0), A(0,2) şi B (4/5,18/5) ale mulţimii de soluţii admisibile ale programului original (P)



Exemplul 4 Vom aplica algoritmul simplex şi metoda celor două faze la rezolvarea programului liniar:

$$(P)\begin{cases}(\max)f = 2x_1 + 3x_2\\ 2x_1 + \ x_2 \geq 40\\ \ x_1 + 3x_2 \geq 30\\ \ x_1 + \ x_2 \leq 30\\ \ x_1, x_2 \geq 0\end{cases}$$

Forma standard şi matricea tehnologică a acesteia:

$$(FSP)\begin{cases} 2x_1 + \ x_2 - x_3 \qquad\qquad = 40\\ x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 \qquad = 30\\ x_1 + \ x_2 \qquad\qquad + x_5 = 30\\ \qquad x_j \geq 0 \ j = 1,\cdots,5\\ (\max)f = 2x_1 + 3x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5\end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Pentru formarea bazei unitare de start introducem variabilele artificiale x_6 şi x_7 în primele două restricţii din (FSP).
În faza I se rezolvă programul în formă bună:

$$\begin{cases} 2x_1 + \ x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 \qquad = 40\\ x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 \qquad\qquad + x_7 = 30\\ x_1 + \ x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad\quad = 30\\ \qquad x_j \geq 0 \ j = 1,\cdots,7\\ \qquad (\min)w = x_6 + x_7\end{cases} \qquad \begin{array}{c} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \quad A^1 \ A^2 \quad A^3 \quad A^4 \ A^5 \ A^6 \ A^7\end{array}$$

plecând de la baza unitară $E = \left[A^6, A^7, A^5\right]$. Vezi tabelele 4.13 – 4.15

			0	0	0	0	0	1	1	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	40	2	1	-1	0	0	1	0	40:1=40
1	x_7	30	1	$\boxed{3}$	0	-1	0	0	1	30:3=**10**
0	x_5	30	1	1	0	0	1	0	0	30:1=30
	w	70	3	4	-1	-1	*	*	*	
1	x_6	30	$\boxed{5/3}$	0	-1	1/3	0	1	-1/3	30:5/3=**18**
0	x_2	10	1/3	1	0	-1/3	0	0	1/3	10:1/3=30
0	x_5	20	2/3	0	0	1/3	1	0	-1/3	20:2/3=30
	w	30	5/3	*	-1	1/3	*	*	-4/3	
0	x_1	18	1	0	-3/5	1/5	0	3/5	-1/5	
0	x_2	4	0	1	1/5	-2/5	0	-1/5	2/5	
0	x_5	8	0	0	2/5	1/5	1	-2/5	-1/5	
	w	0	*	*	0	0	*	-1	-1	

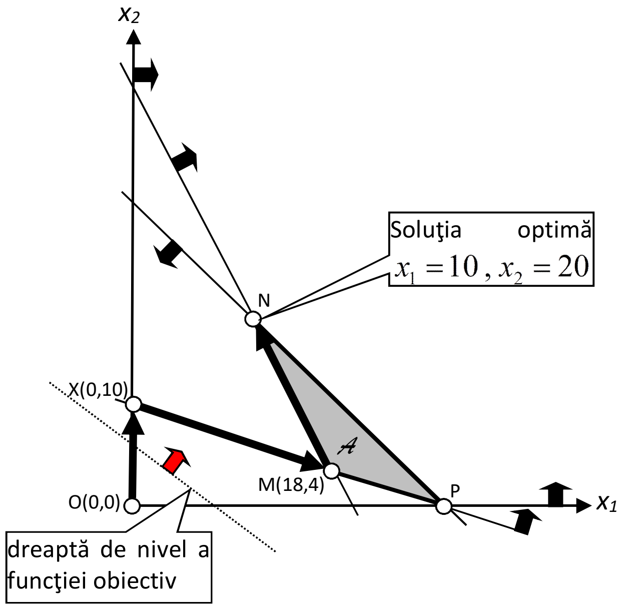
Atenţie: se aplică instrucţiunile algoritmului simplex pentru problemele de **minimizare**! Astfel, la prima iteraţie testul de optimalitate nu este verificat deoarece există costuri reduse **pozitive**. În bază intră coloana A^2 care are cel mai mare cost redus: $\overline{c}_2 = 4 > 0$ În dreapta tabelului au fost afişate rapoartele care definesc –prin minimul lor – coloana care iese din bază.

În faza II se maximizează funcţia obiectiv originală *f* plecând de la soluţia admisibilă de bază găsită la finele primei faze – vezi tabelele 4.16 şi 4.17. De fapt, tabelul 4.16 este tabelul 4.15 din care au fost eliminate coloanele variabilelor artificiale,costurile reduse fiind recalculate în raport cu funcţia *f*.

			2	3	0	0	0	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	18	1	0	-3/5	1/5	0	18:1/5 = 90
3	x_2	4	0	1	1/5	-2/5	0	-
0	x_5	8	0	0	2/5	$\boxed{1/5}$	1	8:1/5 = **40**
	f	48	*	*	-3/5	-4/5	*	
2	x_1	10	1	0	-1	0	-1	
3	x_2	20	0	1	1	0	2	
0	x_4	40	0	0	2	1	5	
	f	80	*	*	1	*	4	

Recapitulând, algoritmul simplex a examinat patru soluţii de bază ale căror proiecţii în planul variabilelor originale x_1 , x_2 sunt punctele O , X , M şi N

Baza	Soluţia $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$	Proiecţia soluţiei în planul (x_1, x_2)
A^6,A^7,A^5	(0,0,0,0,30,**40**,**30**)	O (0,0)
A^6,A^2,A^5	(0,10,0,0,20,**30**,**0**)	X (0,10)
A^1,A^2,A^5	(18,4,0,0,8,**0**,**0**)	M (18,4)
A^1,A^2,A^4	(10,20,0,40,5,**0**,**0**)	N (10,20)



În primele două soluţii, cel puţin una din variabilele artificiale x_6 sau x_7 are valoare **nenulă**; punctele corespunzătoare O şi X sunt **în afara** mulţimii soluţiilor admisibile $\mathcal{A}$! Celelalte două soluţii, în care $x_6 = x_7 = 0$ se identifică cu vârfurile M şi N ale lui $\mathcal{A}$.

Exemplul 5 Cu ajutorul algoritmului simplex vom arăta că programul:

$$(P)\begin{cases} 5x_1 - \ x_2 + \ x_3 \geq 6 \\ 2x_1 + \ x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ -3x_1 + \ x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ (\min) f = 6x_1 + x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

este incompatibil (nu are soluţii admisibile)

Scriem forma standard şi matricea tehnologică a acesteia:

$$(FSP)\begin{cases} 5x_1 - \ x_2 + \ x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 + \ x_2 + 3x_3 + x_5 = 7 \\ -3x_1 + \ x_2 + 2x_3 - x_6 = 2 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 6 \\ (\min) f = 6x_1 + x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\quad A^1 \quad A^2 \quad A^3 \quad A^4 \quad A^5 \quad A^6$$

Pentru formarea bazei unitare de start introducem variabilele artificiale x_7 şi x_8 în prima respectiv a treia ecuaţie din (FSP). Forma bună a programului este:

$$(FBP)\begin{cases} 5x_1 - \ x_2 + \ x_3 - x_4 + x_7 = 6 \\ 2x_1 + \ x_2 + 3x_3 + x_5 = 7 \\ -3x_1 + \ x_2 + 2x_3 - x_6 + x_8 = 2 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 6 \\ (\min) f = 6x_1 + x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + M \cdot x_7 + M \cdot x_8 \end{cases}$$

Iniţiem procedura simplex cu baza unitară $E = \begin{bmatrix} A^7 & A^5 & A^8 \end{bmatrix}$ -. Din ultimul tabel rezultă că **în soluţia optimă a (FBP), variabila artificială x_7 are valoare nenulă**: $x_7 = 1$. Se conchide că programul original (P) nu are soluţii admisibile (este incompatibil).

			6	1	-2	0	0	0	M	M	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
M	x_7	6	5	-1	1	-1	0	0	1	0	6:1 = 6
0	x_5	7	2	1	3	0	1	0	0	0	7:3 = 2,33
M	x_8	2	-3	1	$\boxed{2}$	0	0	-1	0	1	2:2 = **1**
	f	8M	2M – 6	-1	3M+2	-M	*	-M	*	*	
M	x_7	5	13/2	-3/2	0	-1	0	1/2	1	-1/2	5 : 13/2 = 10/13
0	x_5	4	$\boxed{13/2}$	-1/2	0	0	1	3/2	0	-3/2	4 : 13/2 = **8/13**
-2	x_3	1	-3/2	1/2	1	0	0	-1/2	0	1/2	-
	f	5M - 2	-13M/2 - 3	-3M/2 - 2	*	-M	*	M/2 + 1	*	-3M/2 - 1	
M	x_7	1	0	-1	0	-1	-1	-1	1	1	
6	x_1	8/13	1	-1/13	0	0	2/13	3/13	0	-3/13	
-2	x_3	25/13	0	5/13	1	0	3/13	-2/13	0	2/13	
	f	M - 2/13	*	-M – 16/13	*	-M	-M + 6/13	-M + 22/13	*	-22/13	

:

Exemplul 6 Vom arăta – cu ajutorul algoritmului simplex –că programul:

$$(P)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 21 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ (\max) f = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{cases}$$

are mai multe soluţii optime **de bază** şi de aici o **infinitate de soluţii optime**!
Introducem variabilele de abatere x_4 şi x_5 în restricţiile inegalităţi (rezultând forma standard (FSP)) după care, pentru formarea bazei unitare de start, introducem şi variabilele artificiale x_6 şi x_7 în primele două relaţii. Obţinem forma bună:

$$(FBP)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 10 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 21 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 7 \\ (\max) f = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - Mx_6 - Mx_7 \end{cases}$$

Aplicarea algoritmului simplex este afişată în tabelele 4.22 – 4.26. La iteraţia 4 (tabelul 4.25) s-a găsit soluţia optimă a programului (FBP) în care **variabilele artificiale x_6 şi x_7 au valoarea zero**; în consecinţă forma standard (FSP) are soluţia optimă x^*, asociată bazei $\left[A^3 \ A^1 \ A^2\right]$, în care:

$$x_1^* = 13/3 \quad x_2^* = 10/3 \quad x_3^* = 7/3 \quad (\max) f = 21$$

valorile variabilelor de abatere: $x_4^* = 0 \quad x_5^* = 0$

			2	3	1	0	0	-M	-M	
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-M	x_6	10	1	1	1	0	0	1	0	10 : 1 = 10
-M	x_7	1	$\boxed{1}$	-1	0	-1	0	0	1	1 : 1 = **1**
0	x_5	21	2	3	1	0	1	0	0	21 : 2 = 10.5
	f	-11M	-2M-2	-3	-M-1	M	*	*	*	
-M	x_6	9	0	2	1	1	0	1	-1	9 : 2 = 4.5
2	x_1	1	1	-1	0	-1	0	0	1	-
0	x_5	19	0	$\boxed{5}$	1	2	1	0	-2	19 : 5 = **3.8**
	f	-9M+2	*	-2M-5	-M-1	-M-2	*	*	2M+2	
-M	x_6	7/5	0	0	$\boxed{3/5}$	1/5	-2/5	1	-1/5	7/5 : 3/5 = **7/3**
2	x_1	24/5	1	0	1/5	-3/5	1/5	0	3/5	24/5 : 1/5 = 24
3	x_2	19/5	0	1	1/5	2/5	1/5	0	-2/5	19/5 : 1/5 = 19
	f	-7M/5 + 21	*	*	-3M/5	-M/5	2M/5 + 1	*	6M/5	

1	x_3	7/3	0	0	1	$\boxed{1/3}$	-2/3	5/3	-1/3	7/3 : 1/3 = **7**
2	x_1	13/3	1	0	0	-2/3	1/3	-1/3	2/3	-
3	x_2	10/3	0	1	0	1/3	1/3	-1/3	-1/3	10/3 : 1/3 = **10**
	f	21	*	*	*	0	1	M	M	
0	x_4	7	0	0	$\boxed{3}$	1	-2	5	-1	7 : 3 = **2.33**
2	x_1	9	1	0	2	0	-1	3	0	9 : 2 = 4.5
3	x_2	1	0	1	-1	0	1	-2	0	
	f	21	*	*	0	*	1	M	M	

Tabelele 4.22 – 4.26

Din tabelul 4.25 rezultă că variabila nebazică x_4 are costul redus **nul**: $\overline{c}_4 = 0$. **Introducerea coloanei A^4 în baza curentă conduce la o altă soluţie admisibilă de bază, tot atât de bună ca şi soluţia x^* deci optimă!!** (vezi tabelul 4.26). Noua soluţie x^{**} este asociată bazei $\left[A^4 \;\; A^1 \;\; A^2\right]$ şi are componentele:

$$x_1^{**} = 9 \quad x_2^{**} = 1 \quad x_3^{**} = 0 \quad (\max) f = 21$$

valorile variabilelor de abatere: $x_4^{**} = 7 \quad x_5^{*} = 0$

Programul original (P) va avea o infinitate de soluţii optime care sunt combinaţii convexe ale soluţiilor de bază x^* şi x^{**} adică au forma: $x = \alpha x^* + (1-\alpha)x^{**}$ cu $0 \le \alpha \le 1$ sau, pe componente:

$$x \equiv \begin{cases} x_1 = {}^{13}\!/_{3} \cdot \alpha + 9(1-\alpha) = 9 - {}^{14}\!/_{3} \cdot \alpha \\ x_2 = {}^{10}\!/_{3} \cdot \alpha + 1 - \alpha = 1 + {}^{7}\!/_{3} \cdot \alpha \\ x_3 = {}^{7}\!/_{3} \cdot \alpha \\ \text{valorile variabilelor de abatere:} \\ \mathrm{x}_4 = 7 - 7 \cdot \alpha \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

De exemplu, pentru $\alpha = {}^{3}\!/_{7}$ propgramul (P) are soluţia optimă:

$$x_1 = 7 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 1 \quad (\max) f = 21$$

valorile variabilelor de abatere: $x_4 = 4 \quad x_5 = 0$

care nu este o soluţie de bază!!