Se da problema de transport:

Destinatii Surse	D1	D2	D3	D4	D5	Disponibil
S1	5	1	8	7	5	**15**
S2	3	9	6	7	8	**25**
S3	4	2	7	6	5	**42**
S4	7	11	10	4	9	**35**
Cerere	**30**	**20**	**15**	**10**	**20**	

a) Verificati daca este echilibrata
b) Echilibrati problema, daca nu este
c) Verificati daca problema admite solutii degenerate
d) Gasiti cate o solutie initiala prin metodele cunoscute (NV,C_{min}L,C_{min}C,C_{min},DM)
e) Gasiti solutia optima.

a) Echilibrata ⇔ suma cererilor = suma disponibilurilor
Suma cererilor = 30+20+15+10+20 = 95
Suma disponibilurilor = 15+25+42+35 = 117
Cum cele 2 sume sunt diferite rezulta ca problema NU e echilibrata

b) Deoarece oferta este mai mare decat cererea, echilibrarea se face prin adaugarea unei destinatii suplimentare a carei cere e fix surplusul de oferta (117 – 95 = 22):

Destinatii Surse	D1	D2	D3	D4	D5	D6	Disponibil
S1	5	1	8	7	5	0	**15**
S2	3	9	6	7	8	0	**25**
S3	4	2	7	6	5	0	**42**
S4	7	11	10	4	9	0	**35**
Cerere	**30**	**20**	**15**	**10**	**20**	**22**	

Transporturile finale de la surse spre aceasta destinatie vor fi cantitatile care raman la surse si, pentru ca acest transport nu se face, de fapt si nici nu trebuie sa influenteze rezultatul, costurile unitare pe aceste rute vor fi 0.

c) Problema are solutii degenerate daca si numai daca exista o submultime stricta si nevida de surse si o submultime stricta si nevida de destinatii cu proprietatea ca oferta totala a submultimii de surse este egala cu cererea totala a submultimii de destinatii. Se observa ca, de exemplu: S1+S2=D2+D5, deci problema **admite** solutii degenerate.
d) Gasirea unei solutii initiale
   1. Metoda Nord-Vest

15						15-15
15	10					25-15-10
	10	15	10	7		42-10-15-10-7
				13	22	35-13-22
30-15-15	20-10-10	15-15	10-10	20-7-13	22-22	

Avem 9 rute = 4+6-1 deci solutia e nedegenerata

Cost total = 15*5+15*3+10*9+10*2+15*7+10*6+7*5+13*9+22*0 = 547

2. Metoda costului minim pe linii

					15	15-15
18					7	25-7-18
12	20			10		42-20-12-10
		15	10	10		35-10-15-10
30-18-12	20-20	15	10	20-10	22-15-7	

Avem 9 rute = 4+6-1 deci solutia e nedegenerata

Cost total = 15*0+18*3+7*0+12*4+20*2+10*5+15*10+10*4+10*9 = 472

3. Metoda costului minim pe coloane

	15					15-15
25						25-25
5	5	15		17		42-5-5-15-17
			10	3	22	35-10-3-22
30-25-5	20-15-5	15-15	10-10	20-17-3	22-22	

Avem 9 rute = 4+6-1 deci solutia e nedegenerata

Cost total = 15*1+25*3+5*4+5*2+15*7+17*5+10*4+3*9+22*0 = 377

4. Metoda costului minim din tot tabelul

					15	15-15
18					7	25-7-18
12	20			10		42-20-12-10
		15	10	10		35-10
30-18-12	20-20	15	10-10	20-10	22-15-7	

Se observa ca este aceeasi solutie ca la costul minim pe linii, deci nedegenerata si cu costul total = 472

5. Metoda diferentelor maxime

	1	1	1	2	0	0	
1							**15**
3							**25**
2							**42**
4						**22**	**35-22**
	30	**20**	**15**	**10**	**20**	**22-22**	

	1	1	1	2	0		
4		**15**					**15-15**
3							**25**
2							**42**
3						22	**35-22**
	30	**20-15**	**15**	**10**	**20**	**22-22**	

	1	**7**	1	2	3		
		15					**15-15**
3							**25**
2		**5**					**42-5**
3						22	**35-22**
	30	**20-15-5**	**15**	**10**	**20**	**22-22**	

	1		1	2	**3**		
		15					**15-15**
3	**25**						**25-25**
1		5					**42-5**
3						22	**35-22**
	30-25	**20-15-5**	**15**	**10**	**20**	**22-22**	

	3		3	2	**4**		
		15					**15-15**
	25						**25-25**
1		5			**20**		**42-5-20**
3						22	**35-22**
	30-25	**20-15-5**	**15**	**10**	**20-20**	**22-22**	

	3		**3**	2			
		15					**15-15**
	25						**25-25**
2	**5**	5			20		**42-5-20-5**
3						22	**35-22**
	30-25-5	**20-15-5**	**15**	**10**	**20-20**	**22-22**	

			3	2			
		15					**15-15**
	25						**25-25**
1	5	5			20		**42-5-20-5**
6				**10**		22	**35-22-10**
	30-25-5	**20-15-5**	**15**	**10-10**	**20-20**	**22-22**	

	15					**15-15**
25						**25-25**
5	5	**12**		20		**42-5-20-5-12**
		3	10		22	**35-22-10-3**
30-25-5	**20-15-5**	**15-12-3**	**10-10**	**20-20**	**22-22**	

Avem 9 rute = 4+6-1 deci solutia e nedegenerata

Cost total = 15*1+25*3+5*4+5*2+12*7+20*5+3*10+10*4+22*0 = 374

e) Gasirea solutiei optime (Obs. In mod normal se porneste de la solutia de cost minim, dar, in acest caz, pentru a fi siguri ca va exista si o imbunatatire a solutiei, vom porni de la solutia obtinuta prin metoda costului minim pe coloane care este sigur suboptimala)

1. Introducerea variabilelor u si v:

Destinatii / Surse	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**	**D5**	**D6**	
S1		15(c=1)					**u1**
S2	25(c=3)						**u2**
S3	5(c=4)	5(c=2)	15(c=7)		17(c=5)		**u3**
S4				10(c=4)	3(c=9)	22(c=0)	**u4**
	v1	**v2**	**v3**	**v4**	**v5**	**v6**	

2. Construirea sistemului $u_i+v_j=c_{ij}$ (cate o ecuatie pentru fiecare ruta folosita in solutie)

u1+v2=1
u2+v1=3
u3+v1=4
u3+v2=2
u3+v3=7
u3+v5=5
u4+v4=4
u4+v5=9
u4+v6=0

3. Gasirea rapida a unei solutii particulare a sistemului (avem o necunoscuta in plus, deci o infinitate de solutii, dara avem nevoie de o solutie particulara pe care sa o gasim cat mai usor si rapid.): vom egala cu 0 variabila care apare de cele mai multe ori (u3)

   u3=0 => v1=4, v2=2,v3=7,v5=5
   v1=4 => u2=-1
   v2=2 => u1=-1
   v5=5 => u4=4
   u4=4 => v4=0, v6=-4

4. Calcularea $\Delta_{ij} = u_i+v_j - c_{ij}$ pentru rutele care nu fac parte din solutie:

$\Delta_{11} = -1+4-5 = -2$
$\Delta_{13} = -1+7-8 = -2$
$\Delta_{14} = -1+0-7 = -8$
$\Delta_{15} = -1+5-5 = -1$
$\Delta_{16} = -1-4-0 = -5$
$\Delta_{22} = -1+2-9 = -8$
$\Delta_{23} = -1+7-6 = 0$
$\Delta_{24} = -1+0-7 = -8$
$\Delta_{25} = -1+5-8 = -4$
$\Delta_{26} = -1-4-0 = -5$
$\Delta_{34} = 0+0-6 = -6$
$\Delta_{36} = 0-4-0 = -4$
$\Delta_{41} = 4+4-7 = 1$
$\Delta_{42} = 4+2-11 = -5$
$\Delta_{43} = 4+7-10 = 1$

Deoarece exista Δ_{43} strict pozitivi => solutia nu este optima. Va intra in baza ruta care are cel mai pozitiv Δ. Cum in acest caz maximul este multiplu alegem unul la intamplare (Δ_{41} lexicografic primul).

5. Gasirea circuitului care pleaca din ruta (S_4 -> D_1) si trece doar prin rute din solutie mergand doar pe orizontala si verticala si schimband directia la fiecare pas

Destinatii **Surse**	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**	**D5**	**D6**	
S1		15(c=1)					**u1**
S2	25(c=3)						**u2**
S3	5(c=4)	5(c=2)	15(c=7)		17(c=5)		**u3**
S4				10(c=4)	3(c=9)	22(c=0)	**u4**
	v1	**v2**	**v3**	**v4**	**v5**	**v6**	

Se observa ca acest traseu este unic

6. Notam alternativ cu + si – rutele de pe traseu incepand cu + din ruta care va intra in solutie

7. Minimul dintre cantitatile transportate pe rutele cu – este θ = 3, iar acesta se scade din transporturile pe rutele cu – si se adauga la cele cu + rezultand noua solutie:

Destinatii **Surse**	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**	**D5**	**D6**	
S1		15(c=1)					**u1**
S2	25(c=3)						**u2**
S3	2(c=4)	5(c=2)	15(c=7)		20(c=5)		**u3**
S4	**3(c=7)**			10(c=4)	**0**(c=9)	22(c=0)	**u4**
	v1	**v2**	**v3**	**v4**	**v5**	**v6**	

A intrat ruta S4->D1 si a iesit ruta S4->D5, micsorarea costului fiind de Δ_{41}* θ = 3 deci noul cost este 374 (care este la fel de mic ca cel de la metoda diferentelor maxime). Reluam algoritmul de la pasul 2:

2. sistemul $u_i+v_j=c_{ij}$

u1+v2=1
u2+v1=3
u3+v1=4
u3+v2=2
u3+v3=7
u3+v5=5
u4+v1=7
u4+v4=4
u4+v6=0

3. Solutia sistemului (alegem tot u_3=0)

u3=0 => v1=4, v2=2,v3=7,v5=5
v1=4 => u2=-1, u4=3
v2=2 => u1=-1
u4=3 => v4=1, v6=-3

4. Calcularea $\Delta_{ij} = u_i+v_j - c_{ij}$ pentru rutele care nu fac parte din solutie:

Δ_{11} = -1+4-5 = -2
Δ_{13} = -1+7-8 = -2
Δ_{14} = -1+1-7 = -7

Δ_{15} = -1+5-5 = -1
Δ_{16} = -1-3-0 = -4
Δ_{22} = -1+2-9 = -8
Δ_{23} = -1+7-6 = 0
Δ_{24} = -1+1-7 = -7
Δ_{25} = -1+5-8 = -4
Δ_{26} = -1-3-0 = -4
Δ_{34} = 0+1-6 = -5
Δ_{36} = 0-3-0 = -3
Δ_{42} = 3+2-11 = -6
Δ_{43} = 3+7-10 = 0
Δ_{45} = 3+5-9 = -1

Toti Δ_{ij} sunt <= 0, deci solutia este optima.